

# CÁLCULO VETORIAL E TENSORIAL - LISTA 1, 2025

ROLDÃO DA ROCHA - UFABC

1. Dados vetores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , mostre que:

- (a)  $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} \times \vec{v}$
- (b)  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- (c)  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{x}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{x}) - (\vec{u} \cdot \vec{x})(\vec{v} \cdot \vec{w})$

2. Calcule o gradiente  $\nabla f$  dos seguintes campos escalares:

- a)  $f(x, y) = y^2 + x \cos(x^3 y)$ ,
  - b)  $f(x, y) = e^{y^2} \tan(xy)$ ,      c)  $\ln(xy^2 - y^3 - 3xz^4)$
- Calcule também  $\|\nabla f\|$  para cada item acima.

3. Considere dois campos escalares  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Prove que  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ .

4. Mostre que  $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\vec{r}$ .

5. Mostre que os operadores divergente e rotacional são *lineares*, ou seja, dados  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  e constante  $a \in \mathbb{R}$  segue-se que:

- a)  $\nabla \cdot (a\vec{u} + \vec{v}) = a\nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot \vec{v}$
- b)  $\nabla \times (a\vec{u} + \vec{v}) = a\nabla \times \vec{u} + \nabla \times \vec{v}$

6. Dado um campo escalar  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e campos vetoriais  $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$  e  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ , mostre que

- (a)  $\nabla \times (f\vec{u}) = f\nabla \times \vec{u} + (\nabla f) \times \vec{u}$
- (b)  $\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{v})$

7. Dados campos vetoriais  $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$  e  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ , mostre que

$$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u}(\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{u}) + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{v}$$

8. Calcule o gradiente do campo escalar  $f(x, y, z) = 3x^2\sqrt{y} + \cos(3z)$ .

Resposta:

$$\nabla f = (6x\sqrt{y})\hat{i} + \left(\frac{3x^2}{2\sqrt{y}}\right)\hat{j} - 3\sin(3z)\hat{k}.$$

9. Calcule o gradiente do campo escalar  $f(x, y, z) = \sin(x)e^y \ln(z)$ .

Resposta:

$$\nabla f = (\cos(x)e^y \ln(z))\hat{i} + (\sin(x)e^y \ln(z))\hat{j} + \left(\frac{1}{z} \sin(x)e^y\right)\hat{k}.$$

10. Calcule  $\nabla \cdot \vec{u}$  e  $\nabla \times \vec{u}$  para os seguintes campos vetoriais:

- (a)  $\vec{u}(x, y, z) = (x^3 + yz^2)\hat{i} + (y + xz)\hat{j} + (z + xy)\hat{k}$
- (b)  $\vec{u}(x, y, z) = (z - 3y^2)\hat{i} + (3x - z)\hat{j} + (y - 2x)\hat{k}$

11. Mostre que  $\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$  se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  forem ambos campos vetoriais irrotacionais.

12. Se  $\vec{u}$  for um campo vetorial irrotacional (ou seja  $\nabla \times \vec{u} = 0$ ), sendo  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , mostre que  $\vec{u} \times \vec{r}$  é solenoidal (um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo).

13. Defina o operador de momento angular  $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ , onde as componentes são dadas por

$$L_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad L_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad L_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Mostre que  $\vec{L} = -i\vec{r} \times \nabla$ . Mostre que  $L_x L_y - L_y L_x = iL_z$ ,  $L_z L_x - L_x L_z = iL_y$ ,  $L_y L_z - L_z L_y = iL_x$ .

14. A velocidade de um fluido bidimensional é dada por  $\vec{v} = \vec{v}(x, y) = u(x, y)\hat{i} - v(x, y)\hat{j}$ . Supondo que o fluido seja incompressível (ou seja,  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ) e irrotacional, prove que valem as *condições de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

15. Calcule  $\nabla \cdot (r^n \vec{r})$ .
16. Sejam  $f, g$  dois campos escalares diferenciáveis. Prove que  $(\nabla f) \times (\nabla g)$  é solenoidal. Use o ex. 6, letra b).
17. Prove que  $\nabla \times (f \nabla f) = 0$ , onde  $f$  é um campo escalar diferenciável.
18. Prove que  $\nabla \times \nabla f = \vec{0}$ , onde  $f$  é um campo escalar de classe  $C^2$ .
19. Dado  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^2$ , calcule  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})$ .
20. Considere o conjunto  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  e o campo vetorial  $\vec{u} = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}$ , se  $(x, y) \in S$ . Mostre que  $\nabla \times \vec{u} = 0 = \nabla \cdot \vec{u}$ .
21. Usando o exercício 7, mostre que se  $\vec{u}$  é um vetor constante, então  $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{r}) = 2\vec{u}$ .
22. (a) Mostre que  $\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \frac{1}{2}\nabla(u^2) - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ , onde  $u = \|\vec{u}\|$ .  
 (b) Dados  $f, g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  campos escalares e, usando o item 6a), mostre que se o potencial magnético  $\vec{A}$  for dado por  $\vec{A} = \frac{1}{2}(f \nabla g - g \nabla f)$ , então o campo magnético  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  é dado por  $\vec{B} = \nabla f \times \nabla g$ .
23. Dado  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^2$ , mostre que

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}}$$

onde

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\hat{i} + F_2(x, y, z)\hat{j} + F_3(x, y, z)\hat{k} = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

(aqui  $F_1(x, y, z)$ ,  $F_2(x, y, z)$  e  $F_3(x, y, z)$  denotam campos escalares que são componentes do campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z)$ ) e

$$\nabla^2 \vec{F} \equiv (\nabla^2 F_1)\hat{i} + (\nabla^2 F_2)\hat{j} + (\nabla^2 F_3)\hat{k}.$$

24. Calcule o rotacional do campo vetorial  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = (y \cos(xy), -x \sin(xyz), z \ln(xyz)).$$

Resposta:

$$\nabla \times \vec{F} = \left( x^2 y \cos(xyz) + \frac{z}{y}, -\frac{z}{x}, -\sin(xyz) + xy(\sin(xy) - z \cos(xyz)) - \cos(xy) \right).$$

25. Mostre que um campo gravitacional não tem spin (ou seja  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ ). Faça isso de duas maneiras:

a) Usando a definição

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3} = -GMm\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

b) Mostramos em aula que existe um potencial  $f(r) = \frac{GMm}{r}$ , cujo gradiente é dado por

$$\nabla f(r) = \nabla \left( \frac{GMm}{r} \right) = GMm \left( \frac{1}{r} \right) = GMm \left( -\frac{1}{r^2} \right) \hat{r} = \vec{F}(x, y, z).$$

Use esta informação.

26. Calcule o rotacional do campo vetorial  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + x^2 + 6z^2, e^{x+y}, z + x + y).$$

Resposta:

$$\nabla \times \vec{F} = (1, 12z - 1, e^{x+y} - 1).$$

27. Calcule o rotacional do campo vetorial  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x, y, z) = (\cos(x) \sin(y), \cos(xz), \sin(yz)).$$

Resposta:

$$(x \sin(xz) + z \cos(yz), 0, -\cos(x) \cos(y) - z \sin(xz)).$$

28. Dado um campo escalar  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e um campo vetorial  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ , então  $\vec{F}$  é dito ser um campo vetorial irrotacional. Se  $\vec{F}$  for um campo vetorial conservativo, então existe um campo escalar  $f = f(x, y, z)$  tal que  $\vec{F} = \nabla f$ . Mostre, usando o ex. 18, que  $\vec{F} = \nabla f$  é um campo vetorial irrotacional.