CÁLCULO VETORIAL E TENSORIAL - LISTA 4

Roldão da Rocha - UFABC

1. Coordenadas parabólicas são definidas pelas transformações

$$\begin{aligned} x(u,v,\theta) &= uv\cos\theta \\ y(u,v,\theta) &= uv\sin\theta \\ z(u,v,\theta) &= \frac{1}{2}(u^2-v^2), \qquad u\in[0,\infty),\ v\in[0,\infty),\ \theta\in[0,2\pi). \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) Defina os versores $\hat{u}, \hat{v}$ e $\hat{\theta}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. (Tais versores são os vetores são $\vec{\mathbf{e}}_u = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial u}, \vec{\mathbf{e}}_v = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial v}, \vec{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\theta}$ normalizados.)
   (b) Calcule o jacobiano e o elemento de volume dV nessas coordenadas.
   (c) Calcule as transformações inversas $u = u(x,y,z), v = v(x,y,z)$ e $\theta = \theta(x,y,z)$.
   (d) Calcule a métrica em coordenadas parabólicas. A métrica é ortogonal?
   (e) Calcule os fatores de escala h_u, h_v e h_θ.
   (f) Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano nessas coordenadas.
   (g) Tal sistema de coordenadas é dextrógiro ou levógiro?

2. Coordenadas esféricas são definidas pelas transformações

$$\begin{aligned} x(r,\theta,\phi) &= r\sin\theta\cos\phi, \\ y(r,\theta,\phi) &= r\sin\theta\sin\phi, \\ z(r,\theta,\phi) &= r\cos\theta, \qquad r\in[0,\infty),\ \theta\in(0,\pi),\ \phi\in[0,2\pi]. \end{aligned} \tag{2}$$

   (a) Defina os versores $\hat{r}, \hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. (Tais versores são os vetores são $\vec{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial r}, \vec{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\theta}, \vec{\mathbf{e}}_\phi = \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial\phi}$ normalizados.)
   (b) Calcule o jacobiano e o elemento de volume dV nessas coordenadas.
   (c) Calcule as transformações inversas $r = r(x,y,z), \theta = \theta(x,y,z)$ e $\phi = \phi(x,y,z)$.
   (d) Calcule a métrica em coordenadas esféricas. A métrica é ortogonal?
   (e) Calcule os fatores de escala h_u, h_v e h_θ.
   (f) Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano nessas coordenadas.
   (g) Tal sistema de coordenadas é dextrógiro ou levógiro?

3. Calcule o gradiente do campo escalar $f(\rho,\theta,z) = \rho^2 + \rho^3\sin^2\theta + 3z^2$, em coordenadas cilíndricas.

4. Calcule o laplaciano do campo escalar $f(\rho,\theta,z) = \rho^2 + \rho^3\sin^2\theta + 3z^2$, em coordenadas cilíndricas.

5. Calcule o divergente do campo vetorial $\vec{F}(\rho,\theta,z) = \rho^3\hat{\rho} + \rho^3\sin\theta\hat{\theta} + 3z^3\cos\theta\hat{k}$, em coordenadas cilíndricas.

6. Calcule o rotacional do campo vetorial $\vec{F}(\rho,\theta,z) = \rho^2\hat{\rho} + \rho^2\cos\theta\hat{\theta} + 3z^2\sin\theta\hat{k}$, em coordenadas cilíndricas.

7. Calcule o gradiente do campo escalar $f(r,\theta,\phi) = r^2 + r^3\cos^3\theta + 3\sin\phi$, em coordenadas esféricas.
8. Calcule o laplaciano do campo escalar $f(r,\theta,\phi) = r^2 + r^3\sin^4\theta + 3\tan\phi$, em coordenadas esféricas.
9. Calcule o divergente do campo vetorial $\vec{F}(r,\theta,\phi) = r^2\cos\phi\hat{r} + r^3\sin\theta\hat{\theta} + 3\sin\phi\sin\theta\hat{\phi}$, em coordenadas esféricas.
10. Calcule o rotacional do campo vetorial $\vec{F}(r,\theta,\phi) = r^2\cos\phi\hat{r} + r^3\sin\theta\hat{\theta} + 3\cos\phi\sin\theta\hat{\phi}$, em coordenadas esféricas.
11. Calcule o laplaciano do campo escalar $f(r,\theta,\phi) = r^2 + r^3\sin^4\theta + 3\tan\phi$, em coordenadas esféricas.
12. Calcule o divergente do campo vetorial $\vec{F}(r,\theta,\phi) = r^2\cos\phi\hat{r} + r^3\sin\theta\hat{\theta} + 3\sin\phi\sin\theta\hat{\phi}$, em coordenadas esféricas.
13. Calcule o rotacional do campo vetorial $\vec{F}(r,\theta,\phi) = r^2\cos\phi\hat{r} + r^3\sin\theta\hat{\theta} + 3\cos\phi\sin\theta\hat{\phi}$, em coordenadas esféricas.
14. Calcule o laplaciano do campo escalar $f(u,v,\theta) = u^2 + v^2 + uv\sin\theta$, em coordenadas parabólicas.
15. Calcule o divergente do campo vetorial $\vec{F}(u,v,\theta) = uv\cos\theta\hat{u} + uv\sin^2\theta\hat{v} - u^2\hat{\theta}$, em coordenadas parabólicas.
16. Calcule o rotacional do campo vetorial $\vec{F}(u,v,\theta) = uv\cos\theta\hat{u} + uv\sin^2\theta\hat{v} - u^2\hat{\theta}$, em coordenadas parabólicas.
17. Um sistema de coordenadas hiperbólicas é definido pelas transformações

$$\begin{aligned} x &= \cosh\mu\sin\theta\cos\phi \\ y &= \cosh\mu\sin\theta\sin\phi \\ z &= \sinh\mu\cos\theta, \qquad \mu\in[0,\infty),\ \theta\in[0,\pi],\ \phi\in[0,2\pi). \end{aligned} \tag{3}$$

    (a) Defina os versores $\hat{\mu},\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. (Tais versores são os vetores são $\vec{\mathbf{e}}_\mu = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mu}, \vec{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}, \vec{\mathbf{e}}_\phi = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}$ normalizados.)
    (b) Calcule o jacobiano e o elemento de volume dV nessas coordenadas.
    (c) Calcule as transformações inversas $u = u(x,y,z), v = v(x,y,z)$ e $\theta = \theta(x,y,z)$.
    (d) Calcule a métrica em coordenadas hiperbólicas. A métrica é ortogonal?
    (e) Calcule os fatores de escala h_μ, h_θ e h_ϕ.
    (f) Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano nessas coordenadas.
18. Calcule o laplaciano do campo escalar $f(\mu,\theta,\phi) = \sin\mu + \sin\theta + \sin\phi$, em coordenadas hiperbólicas.
19. Dado um campo escalar esfericamente simétrico, $f = f(r)$, onde r é a distância radial em coordenadas esféricas, verifique, a expressão para o gradiente em coordenadas esféricas, que

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr}\hat{r}.$$

    Calcule, daí, o campo elétrico $\vec{E} = -\nabla V(r)$, onde

$$V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r}$$

    é o potencial de Coulomb. (Aqui Z denota a carga elétrica em um corpo, e é carga elétrica de uma partícula, ϵ_0 é a permissividade elétrica.

20. Resolva a equação de Laplace $\nabla^2 f = 0$, onde $f = f(\rho)$ é um campo escalar de classe C^2, e ρ denota o raio, em coordenadas cilíndricas.

21. Um fio ao longo do eixo z transporta uma corrente I. O potencial vetorial magnético é dado por

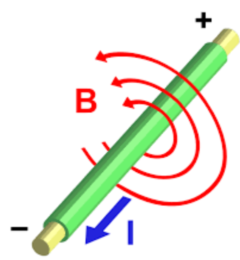
$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \hat{k}\,.$$

Mostre que a indução magnética

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

é dada por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\,\hat{\theta}.$$



22. O fluxo de calor na coroa solar obedece a equação

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0,$$

onde $T = T(r)$ é um campo escalar que denota a temperatura. Aqui $k \propto T^{5/2}$ denota a condutividade térmica. Admitindo-se que $T(r) \propto r^n$, mostre que a equação de fluxo de calor é satisfeita por $T = T_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^p$, onde r_0 é uma constante. Determine p.

23. Em coordenadas esféricas, um campo de força é dado por

$$\vec{F} = \hat{\mathbf{r}}\frac{2P\cos\theta}{r^3} + \hat{\theta}\frac{P\sin\theta}{r^3}, \qquad r \geq P/2\,.$$

Calcule $\nabla \times \vec{F}$ e determine se existe ou não um potencial escalar para $\vec{F}$ (ou seja, existe um campo escalar $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$?) O campo $\vec{F}$ é conservativo?

24. Mostre que o campo vetorial

$$\vec{A} = -\hat{\phi}\frac{\cot\theta}{r}$$

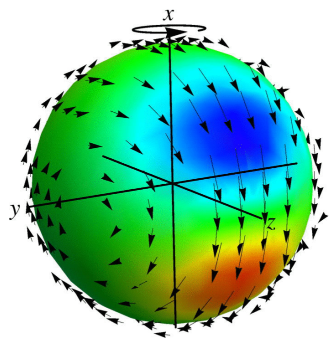
é solução da equação

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Use coordenadas esféricas.

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 h_1 & \hat{\mathbf{q}}_2 h_2 & \hat{\mathbf{q}}_3 h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}.$$

25. Considere a casca esférica rotativa (velocidade angular ω) com carga uniforme



O potencial vetorial magnético é dado por

$$\mathbf{A} = \zeta_0 \frac{\cos\theta}{r^3}\,\hat{\phi} \qquad r > a,$$

onde

$$\zeta_0 = \text{constante} = \frac{\mu_0 a^4 \omega}{3},$$

sendo a = raio da casca esférica e μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo. Calcule a indução magnética $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, calculando o rotacional de $\mathbf{A}$ em coordenadas esféricas.

26. Dado $\vec{A}$ um vetor qualquer em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{r}$ o vetor posição, verifique que

$$(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{r} = \vec{A},$$

usando coordenadas cartesianas.

27. Dado $\vec{A}$ um vetor qualquer em $\mathbb{R}^3$ e $\vec{r}$ o vetor posição, verifique que

$$(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{r} = \vec{A},$$

usando coordenadas esféricas.