

Lista de Exercícios de Aritmética

Baseado no livro de Abramo Hefez (Caps. 1-6)

1. Mostre que, para todos os inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

(a) $(-a)(-b) = ab$

(b) $c(b - a) = cb - ca$

2. Demonstre a desigualdade triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$.

3. Calcule uma expressão fechada para a soma:

$$S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

4. Demonstre a identidade de Euler para $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

5. A sequência de Fibonacci (u_n) é definida por $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ e $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ para $n \geq 3$. Mostre que:

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$$

6. Usando o Binômio de Newton, mostre que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(a-1)^{2n} = ma + 1$.

7. Mostre que o produto de 3 números naturais consecutivos é sempre divisível por 6.

a) Seja k um número inteiro ímpar e positivo. Mostre a seguinte identidade de fatoração para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$x^k + y^k = (x + y)(x^{k-1} - x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 - \cdots - xy^{k-2} + y^{k-1})$$

Sugestão: Você pode verificar a identidade expandindo o lado direito ou usando a substituição $x = -y$ no polinômio $P(x) = x^k + y^k$.

b) Usando a fórmula demonstrada no item (a), escreva a forma fatorada completa de $a^5 + b^5$.

c) A partir da fatoração geral, conclua por que $(a + b)$ é sempre um divisor de $(a^k + b^k)$ quando k é um inteiro ímpar positivo.

8. Mostre que $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.
9. Para quais valores de $n \in \mathbb{N}$ o número $n + 2$ divide $n^4 + 2$?
10. Determine o quociente e o resto da divisão de -38 por 7 .
11. Um número inteiro, quando dividido por 5 , deixa resto igual ao dobro do quociente. Quais são esses números?
12. Mostre que se n é um número inteiro que não é múltiplo de 2 nem de 3 , então $n^2 - 1$ é múltiplo de 24 .
13. Prove que se um inteiro é, ao mesmo tempo, um cubo e um quadrado, então ele é da forma $7k$ ou $7k + 1$.
14. O número $N = [3416]_7$ está escrito na base 7 . Escreva-o nas bases 5 e 12 . (Para a base 12 , use $A=10$ e $B=11$).
15. Um número na base 10 é 37 . Em que base ele será representado como 52 ?
16. Sem converter para a base 10 , calcule na base 5 :
 - (a) $[132]_5 + [413]_5$
 - (b) $[23]_5 \times [342]_5$
17. Encontre um critério de divisibilidade por $b - 1$ para um número escrito na base b . Justifique sua resposta.
18. Um número de três algarismos na base 10 , $N = abc$, é tal que o algarismo das centenas a e o das unidades c diferem de pelo menos duas unidades. Mostre que se subtrairmos o menor do maior entre N e o número com seus algarismos invertidos, cba , o resultado sempre será um número com o algarismo das dezenas igual a 9 e a soma dos outros dois algarismos também igual a 9 .
19. Usando o Algoritmo de Euclides, calcule o MDC dos seguintes pares de números:
 - (a) $\text{mdc}(637, 3887)$
 - (b) $\text{mdc}(648, 1218)$
20. Para o par $(648, 1218)$ do exercício anterior, use o Algoritmo de Euclides Estendido para encontrar inteiros m e n tais que $\text{mdc}(648, 1218) = 648m + 1218n$.
21. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $(2n + 1, 9n + 4) = 1$.
22. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $(a, b) = 1$. Mostre que $(a + b, a - b)$ é 1 ou 2 .
23. Mostre que se $(a, b) = 1$, $a \mid c$ e $b \mid c$, então $ab \mid c$.
24. Calcule o $\text{mmc}(a, b)$ sabendo que $ab = 1200$ e $\text{mdc}(a, b) = 20$.
25. Determine se a equação diofantina linear $12x + 18y = 40$ possui solução. Justifique.
26. Encontre todas as soluções inteiras da equação diofantina $56x + 72y = 40$.

27. Um fazendeiro comprou 100 animais (entre porcos, cabras e ovelhas) por um total de R\$10.000,00. Sabendo que os porcos custam R\$500,00 cada, as cabras R\$300,00 cada e as ovelhas R\$50,00 cada, quantos animais de cada espécie ele comprou?
28. Sejam (u_n) a sequência de Fibonacci. Prove que $\text{mdc}(u_n, u_{n+1}) = 1$ para todo $n \geq 1$.
29. Encontre o menor inteiro positivo que, quando dividido por 8, deixa resto 5 e, quando dividido por 11, deixa resto 4.

Exercícios de Demonstração

Capítulo 1: Os Números Inteiros

- (a) **PROPOSIÇÃO 1.1:** Demonstre que $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, utilizando apenas as propriedades fundamentais da adição e multiplicação (associatividade, comutatividade, distributividade, elementos neutros e simétricos).
- (b) **PROPOSIÇÃO 1.8:** Utilizando o Princípio da Boa Ordenação, demonstre que não existe nenhum número inteiro n que satisfaça a condição $0 < n < 1$.

Capítulo 2: Aplicações da Indução

- (a) **LEMA 2.6 (Relação de Stifel):** Demonstre a Relação de Stifel, que afirma que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tem-se que $\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$.
- (b) **PROPOSIÇÃO 2.16:** Dada a sequência de Fibonacci (u_n) , demonstre por indução completa sobre m que, para todo par de números naturais n e m , vale a identidade: $u_{n+m} = u_n u_{m+1} + u_{n-1} u_m$.

Capítulo 3: Divisão nos Inteiros

- (a) **PROPOSIÇÃO 3.5:** Demonstre que se um inteiro a divide os inteiros b e c , então a divide qualquer combinação linear de b e c . Ou seja, se $a|b$ e $a|c$, então $a|(xb + yc)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$.
- (b) **PROPOSIÇÃO 3.6:** Demonstre que, para quaisquer inteiros a e b com $b \neq 0$, se a divide b , então o valor absoluto de a é menor ou igual ao valor absoluto de b ($|a| \leq |b|$).

Capítulo 4: Representação dos Números Inteiros

- (a) **PROPOSIÇÃO 4.7:** Demonstre o critério de divisibilidade por 9. Ou seja, um número inteiro a representado na base 10 é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 9.
- (b) **COROLÁRIO 4.9:** Demonstre que todo número natural pode ser escrito de maneira única como uma soma de potências distintas de 2.

Capítulo 5: Algoritmo de Euclides

- (a) **LEMA 5.2:** Demonstre que o máximo divisor comum de dois inteiros a e b é o mesmo que o máximo divisor comum de a e $b - na$, para qualquer inteiro n . Isto é, $(a, b) = (a, b - na)$.
- (b) **TEOREMA 5.11 (Lema de Gauss):** Demonstre o Lema de Gauss, que afirma que se um inteiro a divide o produto bc e a é primo com b , então a deve dividir c . (Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$).

Capítulo 6: Aplicações do Máximo Divisor Comum

- (a) **Existência de Solução para Equações Diofantinas:** Demonstre que a equação diofantina linear $ax + by = c$ (com $a, b, c \in \mathbb{Z}$) possui solução inteira se, e somente se, o máximo divisor comum de a e b divide c .
- (b) **Forma da Solução Geral de Equações Diofantinas:** Demonstre que se (x_0, y_0) é uma solução particular da equação $ax + by = c$ e $d = (a, b)$, então o conjunto de todas as soluções inteiras é dado por:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \quad \text{e} \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t$$

para todo $t \in \mathbb{Z}$.