

LISTA 5

Sequências e Séries de Funções

1 — Mostre que, se (f_n) converge uniformemente em (a, b) e $(f_n(a))$ e $(f_n(b))$ convergem, então (f_n) converge uniformemente em $[a, b]$.

2 — Seja $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$. Mostre que (f_n) não converge uniformemente para 0 em $[0, 1]$.

3 — Mostre que a sequência (nxe^{-nx^2}) converge uniformemente para 0 em $[a, \infty)$ para todo $a > 0$.

4 — Dê um exemplo de uma sequência de funções que não é contínua em nenhum ponto, mas que converge uniformemente para uma função contínua.

5 — Para cada uma das sequências de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas no intervalo $I = [0, 1]$ abaixo:

- Encontre a função limite pontual $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- Verifique se a convergência é uniforme em $[0, 1]$.
- Justifique sua resposta.

a $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$

b $f_n(x) = \frac{\sin(nx^2)}{n+1}$

c $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

d $f_n(x) = x^n$

e $f_n(x) = x^n(1-x)^n$

f $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$

g $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$

h $f_n(x) = 4n^2x(1-x)^n$

6 — Nos itens a seguir determine o raio de convergência das séries de potências fornecidas. Teste a convergência nos pontos de fronteira, caso o raio de convergência seja finito.

a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

b $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)2^n}$

c $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}$

d $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 2^n z^n}{2n}$

e $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] z^n$

f $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n}$

g $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^n}{n^2 + 1}$

h $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$

i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} z^n}{n}$

7 — Suponha que a sequência (a_n) seja limitada, mas que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Prove que o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é igual a 1.

8 — Se $A \subseteq \mathbb{R}$, defina $-A$ como sendo $\{-a : a \in A\}$. Seja A o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Prove que o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$ é $-A$.

9 — Nos itens a seguir determine o raio de convergência das séries de potências fornecidas.

a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$

b $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin an) z^n$,
 $a > 0$.

c $\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh an) z^n$,
 $a > 0$.

d $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n}$,
 $a > 0, b > 0$.

10 — Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência em $\mathbb{R}$ para as seguintes séries de potências:

NÚMEROS REAIS E SEQUÊNCIAS

$$\text{a)} \sum_{j=0}^{\infty} j^{20} x^j.$$

$$\text{b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{3^j j^4}.$$

$$\text{c)} \sum_{j=1}^{\infty} j x^j.$$

$$\text{d)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{5^j} x^j.$$

$$\text{e)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j j^2 x^j.$$

$$\text{f)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x^j.$$

$$\text{g)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{(2j)} j}{(j!)^2} x^j.$$

$$\text{h)} \sum_{j=1}^{\infty} \ln(j) x^j.$$

11 — (Teorema de Taylor - Resto de Lagrange)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e $n+1$ vezes diferenciável em (a, b) . Vamos demonstrar que existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Para isso, considere K uma constante real tal que a igualdade abaixo seja verdadeira (encarando b como fixo):

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + K \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Defina a função auxiliar $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\phi(t) = f(b) - \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (b-t)^k \right) - K \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

1. Verifique os valores de $\phi(a)$ e $\phi(b)$. A função ϕ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle?
2. Calcule a derivada $\phi'(t)$. Mostre que, devido a um cancelamento telescópico na soma, a derivada se simplifica para:

$$\phi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n + K \frac{(b-t)^n}{n!}.$$

3. Utilize o Teorema de Rolle para garantir a existência de $c \in (a, b)$ tal que $\phi'(c) = 0$ e conclua que $K = f^{(n+1)}(c)$, demonstrando o teorema.

12 — (Teorema de Taylor com Resto Integral) Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n+1} em um intervalo aberto I e seja $a \in I$. O objetivo deste exercício é provar que, para todo $x \in I$, vale:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x),$$

$$\text{sendo } R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt.$$

1. Caso Base ($n = 0$): Utilize o Teorema Fundamental do Cálculo para mostrar que a fórmula é válida para $n = 0$.

2. Passo Indutivo: Suponha que a fórmula seja válida para um certo $n-1 \in \mathbb{N}$, ou seja:

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

Utilize **integração por partes** nesta integral para demonstrar a validade da fórmula para n .

Dica: Para a integração por partes, faça $u = f^{(n)}(t)$ e $dv = (x-t)^{n-1} dt$. Ao escolher a primitiva v .

13 — Cada uma das funções nos itens a seguir admite uma representação em série de potências em termos de x . Suponha a existência da expansão, verifique que os coeficientes têm a forma indicada e mostre que a série converge para os valores de x indicados.

$$\text{a)} \quad a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n, \quad a > 0 \quad (\text{todo } x). \quad \text{Dica: } a^x = e^{x \log a}.$$

$$\text{b)} \quad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{todo } x).$$

$$\text{c)} \quad \begin{aligned} \sin^2 x &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \quad (\text{todo } x). \quad \text{Dica:} \\ \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x. \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \quad (|x| < 2).$$

$$\boxed{\text{e}} \quad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad (\text{todo } x).$$

14 — Calcule a Série de Taylor para as seguintes funções. Escreva as expressões para o erro e faça estimativas quando possível.

$$\boxed{\text{a}} \quad \sinh(x)$$

$$\boxed{\text{b}} \quad \cosh(7x)$$

$$\boxed{\text{c}} \quad a^x$$

$$\boxed{\text{d}} \quad a^{x^{25}}$$

$$\boxed{\text{e}} \quad \frac{1}{1+x}$$

$$\boxed{\text{f}} \quad \log(1+x)$$

$$\boxed{\text{g}} \quad \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

$$\boxed{\text{h}} \quad \cos^2(7x^{16})$$

$$\boxed{\text{i}} \quad \frac{x}{1+x-2x^2} \quad (|x| < 1/2)$$

$$\boxed{\text{j}} \quad (1+x)^\alpha \text{ com } \alpha \text{ real}$$

15 — Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Suponha que f seja representada por uma série de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Encontre uma condição na sequência $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ que seja equivalente à condição $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e prove a equivalência. Uma função que satisfaz essa condição é chamada de função **par**.

16 — Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $a \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Suponha que f seja representada por uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Seja R o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Encontre uma condição na sequência $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ que seja equivalente a f ter um máximo local em a , e prove a equivalência.