

## LISTA 2

## Valor absoluto

1 — Demonstre as seguintes propriedades do módulo;

- ☐ a  $|x - y| = |y - x|$
- ☐ b  $|x| = c \Leftrightarrow x = \pm c$
- ☐ c  $|x \cdot y| = |x||y|$
- ☐ d Se  $c \geq 0$  então  $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$
- ☐ e  $-|x| \leq x \leq |x|$
- ☐ f  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Desigualdade Triangular)
- ☐ g  $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- ☐ h Se  $|x - y| < c$ , então  $|x| < |y| + c$ .

2 — (Não existência de Infinitesimais) Mostre que se  $|x - a| < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon$  então  $x = a$ .

## Topologia da Reta

3 — Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.

4 — Dado um número natural  $p > 1$ , prove que os números racionais da forma  $\frac{m}{p^n}$ , onde  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$  constituem um subconjunto denso em  $\mathbb{R}$ .

5 — Prove ou forneça um contraexemplo: Se um conjunto  $S$  possui um máximo e um mínimo, então  $S$  é um conjunto fechado.

6 — Seja  $A$  um subconjunto não vazio e aberto de  $\mathbb{R}$  e seja  $\mathbb{Q}$  o conjunto dos números racionais. Prove que  $A \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ .

7 — Sejam  $S$  e  $T$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . Prove o seguinte:

- ☐ a  $\text{int} S$  é um conjunto aberto.
- ☐ b  $\text{int}(\text{int} S) = \text{int} S$ .
- ☐ c  $\text{int}(S \cap T) = (\text{int} S) \cap (\text{int} T)$ .
- ☐ d  $(\text{int} S) \cup (\text{int} T) \subseteq \text{int}(S \cup T)$ .
- ☐ e Encontre um exemplo que mostre que a igualdade não precisa valer no item anterior.

8 — Se  $A$  é aberto e  $B$  é fechado, prove que  $A \setminus B$  é aberto e  $B \setminus A$  é fechado.

9 — Seja  $S$  um conjunto infinito e limitado e seja  $x = \sup S$ . Prove: Se  $x \notin S$ , então  $x \in S'$ .

10 — Suponha que  $S$  seja um conjunto não vazio e limitado, e seja  $m = \sup S$ . Prove ou forneça um contraexemplo:  $m$  é um ponto de fronteira de  $S$ .

11 — Para qualquer conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}$ , seja  $\bar{S}$  a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm  $S$ .

- ☐ a Prove que  $\bar{S}$  é um conjunto fechado.
- ☐ b Prove que  $\bar{S}$  é o menor conjunto fechado que contém  $S$ . Ou seja, mostre que  $S \subseteq \bar{S}$ , e se  $C$  é qualquer conjunto fechado que contém  $S$ , então  $\bar{S} \subseteq C$ .
- ☐ c Prove que  $\bar{S} = \text{cl} S$ .
- ☐ d Se  $S$  é limitado, prove que  $\bar{S}$  é limitado.

12 — Dê exemplo de uma sequência decrescente de intervalos fechados (ilimitados) cuja interseção seja vazia e de uma sequência decrescente de intervalos (abertos) limitados cuja interseção seja vazia.