

LISTA 3

Sequências

1 — Prove a partir da definição que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

2 —

- a** Mostre que se a_n converge para a , então $|a_n|$ converge para $|a|$

Dica: use que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

- b** É verdade que se $|a_n|$ converge, então a_n converge? Prove ou forneça um contraexemplo.

3 — Seja a_n uma sequência de números reais, e L um número real. Defina $b_n = |a_n - L|$. Mostre que a_n converge para L se, e somente se, b_n converge para 0.

4 — Considere uma sequência de termo geral a_n e suponha que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. Prove que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a.$$

5 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é limitada superiormente e inferiormente. Prove suas afirmações:

- a** $a_n = n^2 + n$
b $a_n = n^2 - 7n$
c $a_n = \frac{n!}{2^n}$

6 — Prove que as seguintes sequências divergem:

- a** $n - 10000$
b $n!$
c n^3

d $(-1)^n n$

e $a_1 = 1 \quad a_n = n \cdot a_{n-1}$

7 — Prove que se (a_n) é decrescente e limitada então a_n converge.

8 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é crescente, decrescente ou nenhuma dessas duas. Prove suas afirmações:

a $a_n = n^2 + n$

b $a_n = n^2 - 7n$

c $a_n = \frac{1}{n^2}$

d $a_n = \frac{2n-6}{3n+4}$

e A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

9 — Prove por indução que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

- a** Usando o exercício anterior, mostre que dados $p, q \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

- b** Mostre que dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^\alpha = a^\alpha.$$

10 — Suponha que a_n seja uma sequência crescente, b_n seja uma sequência decrescente, e que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq 1$.

- a** Mostre que a_n e b_n convergem.

NÚMEROS REAIS E SEQUÊNCIAS

- b** Se, além das hipóteses anteriores, temos que $b_n - a_n$ converge para 0, prove que a_n e b_n convergem para o mesmo limite.

11 — Prove que se (a_n) é decrescente e limitada então a_n converge.

12 — Dê um exemplo de uma sequência não limitada que não diverge para $+\infty$ ou para $-\infty$.

13 — Para s_n a sequência de termo geral dado abaixo, determine a convergência ou divergência da sequência (s_n) . Calcule, caso exista, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.

- a** $s_n = \frac{n^4 + 3n + 1}{5n^4 + 2}$
b $s_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
c $s_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
d $s_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx$
e $s_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$, onde α é um real dado
f $s_n = \int_0^n e^{-sx} dx$ ($s > 0$)
g $s_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$
h $s_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1}$
i $s_n = \frac{n^2-2}{n+1}$
j $s_n = \frac{1-n}{2^n}$
k $s_n = \frac{3^n}{n^3+5}$

14 — Seja a_n uma sequência de números reais que converge para L . Defina $b_n = a_{n+k_0}$. Mostre que b_n também converge para L .

15 —

- a** Dê um exemplo de uma sequência convergente (s_n) de números positivos tal que $\lim(s_{n+1}/s_n) = 1$.
b Dê um exemplo de uma sequência convergente (t_n) de números positivos tal que $\lim(t_{n+1}/t_n) = 1$.

16 — Verifique quais sequências abaixo definidas recursivamente convergem e, em caso afirmativo, qual o seu limite.

- a** $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}$, $a_0 = 1$;
b $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}$, $a_0 = 3$;
c $a_{k+1} = 1 + \frac{1}{a_k}$, $a_0 = 1$;
d $a_{k+2} = a_k + a_{k+1}$, $a_0 = a_1 = 1$
e $a_{k+1} = 2a_k(1 - a_k)$, $a_0 = 1/4$;

17 — Mostre que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

18 — Mostre que se $a_n > 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$.

19 — Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n}$

20 — Prove que toda sequência de Cauchy é limitada.

21 — Dizemos que uma sequência (s_n) é contrativa se existe uma constante k com $0 < k < 1$ tal que $|s_{n+2} - s_{n+1}| \leq k |s_{n+1} - s_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que toda sequência contrativa é uma sequência de Cauchy e, portanto, é convergente.