

LISTA 4

Séries

1 — Prove cada um dos critérios de convergência para séries a seguir:

- a** Seja (a_n) uma sequência decrescente de termos não negativos. Prove o teste de condensação de Cauchy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ converge}$$

- b** Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e suponha que existe o limite:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

1. Se $L < 1$, a série $\sum a_n$ converge absolutamente. 2. Se $L > 1$ (incluindo $L = \infty$), a série $\sum a_n$ diverge. 3. Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

- c** Seja $\sum a_n$ uma série e suponha que existe o limite:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1. Se $L < 1$, a série $\sum a_n$ converge absolutamente. 2. Se $L > 1$ (incluindo $L = \infty$), a série $\sum a_n$ diverge. 3. Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

- d** Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos. Calculamos o limite:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Se $0 < L < \infty$ (isto é, L é um número finito e positivo), então:

- Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge.
- Se $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.

- e** Considere a série alternada na forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

onde $b_n > 0$ para todo n .

A série converge se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

1. A sequência (b_n) é (eventualmente) decrescente:

$$b_{n+1} \leq b_n \text{ para todo } n \text{ (ou para } n > N)$$

2. O limite do termo b_n é zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

2 — Mostre que cada uma das séries a seguir é divergente:

- a** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$
b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$
c $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
d $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

3 — Encontre a soma de cada uma das séries a seguir:

- a** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$
b $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
c $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
d $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$
e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$
f $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$
g $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$

4 — Dadas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, suponha que existe um número natural N tal que $a_n = b_n$ para todo $n \geq N$. Prove que $\sum a_n$ é convergente se, e

NÚMEROS REAIS E SEQUÊNCIAS

somente se, $\sum b_n$ é convergente. Assim, a convergência de uma série não é afetada pela alteração de um número finito de termos. (Claro, o valor da soma pode mudar.)

5 — Seja (a_n) uma sequência de números reais não negativos. Prove que $\sum a_n$ converge se, e somente se, a sequência das somas parciais é limitada.

6 — Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ converge. Justifique sua resposta.

7 — [Critério de Cauchy para Séries] Prove que: Uma série infinita $\sum a_n$ converge se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que, se $n \geq m \geq N$, então

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

8 — Determine se as seguintes séries convergem ou divergem e justifique sua resposta:

- a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$
- b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1} \log(4n+1)}{n(n+1)}$
- c $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$
- d $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
- e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n^2}$

9 — Prove que, se $\sum |a_n|$ converge e (b_n) é uma sequência limitada, então $\sum a_n b_n$ também converge.

10 — Seja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ uma série de termos positivos. Mostre que, se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n , então a série

diverge.

11 — Teste a convergência das seguintes séries:

- a $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j! e^j}{j^j}$
- b $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{j! j!}$
- c $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j^2}{j!}$
- d $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)!}{j! j}$
- e $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j!)^2}{(2j)!}$
- f $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j!)^3 3^j}{(2j)!}$

12 —

- a Suponha que $a_n > 0$, $b_n > 0$, e $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ para todo n . Mostre que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge se $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ converge.

Dica: Mostre que a sequência $\{a_n/b_n\}$ é não-crescente e use o Exercício 9.)

- b Use a parte (a) para testar a convergência das seguintes séries:

1. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{j e^j j!};$
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{e^j j!}.$

Note que o teste da razão não fornece conclusões nesses exemplos.

13 — Determine se as seguintes séries convergem ou divergem, justificando sua resposta:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2} \right)$