

CÁLCULO VETORIAL E TENSORIAL - LISTA 1

ROLDÃO DA ROCHA - UFABC

1. Calcule o trabalho de uma força descrita pelo campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (y, yx^3)$, ao longo da curva $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$.
2. Calcule o trabalho de uma força descrita pelo campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (1, y, yx^2)$, ao longo da curva $\vec{r}(t) = (2, \cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
3. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x, y, z) = (-x, x^3, xyz)$, ao se mover uma partícula através do segmento de reta que liga o ponto inicial $A = (1, 2, 1)$ ao ponto final $B = (-1, 0, 3)$.
4. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo dos respectivos caminhos indicados:
 - (a) $\vec{F}(x, y) = (x^2 - 2xy)\hat{i} + (y^2 - 2xy)\hat{j}$, entre os pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ ao longo da parábola $y = x^2$. (resp.: $-14/15$).
 - (b) $\vec{F}(x, y) = (y^2 - z^2)\hat{i} - 2yz\hat{j} - x^2\hat{k}$, ao longo da trajetória $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} + t^3\hat{j} + t\hat{k}$, $t \in [0, 1]$.
 - (c) $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + yz\hat{j} + (xz - y)\hat{k}$, ao longo do segmento de reta que liga $(0, -1, 1)$ e $(6, 2, 3)$.
 - (d) $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + (xz - y)\hat{k}$, ao longo da trajetória $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + 4t\hat{k}$, $t \in [0, 1]$.

5. Calcule

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{F}(x, y) = 3y\hat{i} + (x^2 - y)\hat{j}$, onde $C = C_1 \cup C_2$, onde C_1 é a semicircunferência superior de raio 1, centrada na origem, sentido anti-horário, e C_2 é a porção da parábola $y = x^2 - 1$, de $x = -1$ a $x = 1$. (Resposta: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{3\pi}{2} - 4$).

6. Calcule

$$\oint_{C=\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = (y^3, 2x^3),$$

onde D é a região $x^2 + y^2 \leq 4$.

Resposta: $\oint_{C=\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 12\pi$.

7. Calcule $\oint_{C=\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = (y - \sin(x), \cos(x)),$$

onde C é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$, orientado no sentido anti-horário.

Resposta: $2\cos(1) - 2\sin(1) - 1$.

8. Calcule

$$\oint_{C=\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (xy, xy)$, onde C é a fronteira da região D definida por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Resposta: 0.

9. Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a circunferência de raio igual a 5, orientada no sentido horário.

10. Se o potencial eletromagnético é dado por

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{yz}{r(x^2 + y^2)}\hat{i} - \frac{xz}{r(x^2 + y^2)}\hat{j},$$

calcule a indução magnética $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. (resp.: $\vec{B} = \frac{\hat{r}}{r^2}$). Lembre-se que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(Dica inicial: pode-se usar qualquer resultado da Lista 1).

11. Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Calcule a integral de linha $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para a circunferência C de raio 3 orientada no sentido positivo. (Resposta: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6\pi$.)

12. Calcule a integral de linha do campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (x - 2xy)\hat{i} + (y - 2xy)\hat{j} + xz\hat{k}$ ao longo da união $C = C_1 \cup C_2$ entre segmentos de reta, onde C_1 é o segmento de reta que liga os pontos $(1, 0, 1)$ e $(-1, 2, 3)$ e C_2 é o segmento de reta que liga os pontos $(-1, 2, 3)$ e $(4, 2, 5)$.

13. Seja Γ a fronteira do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, orientada no sentido positivo. Calcule

$$\oint_{\Gamma} \frac{2y + \sin x}{1 + x^2} dx + \frac{x + e^y}{1 + y^2} dy.$$

14. Seja Γ a fronteira do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, orientada no sentido positivo. Calcule

$$\oint_{\Gamma} (3x^4 + 5)dx + (y^2 + 3y^2 - 1)dy.$$

15. Mostre que

$$\oint_C ydx + xdy = 0,$$

para qualquer curva fechada simples C .

16. Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Mostre que $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$, para qualquer curva fechada simples C orientada no sentido positivo. Mostre que $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, para qualquer curva fechada simples C orientada no sentido positivo que não contenha a origem.

17. Verifique se o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = (2x^3y^4 + x, 2x^4y^3 + y)$$

é conservativo e, se o for, determine um potencial para $\vec{F}$.

18. Verifique se o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y) = (x^3 - 4xy^2 + 2, 6x - 7y + x^3y^3)$$

é conservativo e, se o for, determine um potencial para $\vec{F}$.

19. Mostre que $\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$, onde $\vec{r}$ é o vetor posição e C é uma curva de Jordan.

20. Dados f e g dois campos escalares definidos em $\mathbb{R}^3$, mostre que dada C uma curva de Jordan,

$$\oint_C f(\nabla g) \cdot d\vec{r} = - \oint_C g(\nabla f) \cdot d\vec{r}.$$

21. Seja Γ o quadrado de vértices em $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ e $(0, 2)$. Seja o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (y^2, x)$. Calcule

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

22. Supondo que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ seja independente do caminho, calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a elipse

$$\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

no sentido anti-horário.

23. Integre a função escalar $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ sobre o caminho dado por $\vec{r}(t) = (t, t, t)$, onde $0 < a < t < b$.

24. Calcule $\int_C (x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, onde C é a fronteira da região contida entre os círculos com centro na origem e raios 1 e 3, respectivamente.

25. Calcule $\int_C x^3 ds$, onde C é formada:

(a) pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, seguido de um segmento de reta C_2 de $(1, 1)$ a $(2, 2)$.

(b) pela elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

26. Calcule a integral de linha

$$\int_C \sin(z)dx + \cos(z)dy - \sqrt[3]{xy}dz,$$

onde C é definida pela curva $C : \vec{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), t)$, no intervalo $t \in [0, 7\pi/2]$. (Podeis identificar o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (\sin(z), \cos(z), -\sqrt[3]{xy})$ e $d\vec{r} = (dx, dy, dz) = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{r}'(t)dt$).

(Resposta: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{7\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = -\frac{1}{2}$).

27. Calcule $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$, onde $f(x, y) = ye^{x^2-1} + 4x\sqrt{y}$, onde a curva é dada por $C : \vec{r}(t) = (1-t, 2t^2 - 2t)$, no intervalo $t \in [0, 3]$.

28. Calcule a massa de um helicóide

$$\begin{cases} x(t) &= 2\cos(t), \\ y(t) &= 2\sin(t), \\ z(t) &= 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

cuja densidade linear é dada por

$$\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

29. Calcule a massa de uma curva dada pelo arco superior de uma circunferência de raio igual a 2, cuja densidade linear é dada por

$$\rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z) = x^2 + y^2.$$

30. Resolva a integral de linha $\int_C \frac{x^3}{y} ds$ onde C é a porção do gráfico $y = \frac{x^2}{2}$ com $0 \leq x \leq 2$.