Lista 2

Álgebra Linear Avançada II

Aplicações Multilineares e Tensores

1 — Verifique a multilinearidade das aplicações abaixo.

a) Dados n, m inteiros positivos. Então a multiplicação de polinomios:

$$* : \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{P}_m(\mathbb{K}) \to \mathcal{P}_{n+m}(\mathbb{K})$$

é uma aplicação bilinear.

b) A aplicação $\square : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\square((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2$$

é uma aplicação trilinear.

c) A aplicação $\clubsuit : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$\clubsuit((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) =$
$(x_1 y_1 z_2, 2x_1 y_2 z_1, 3x_2 y_1 z_1)$
é uma aplicação trilinear.

d) Dado uma aplicação multilinear $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W_1$ e uma transformação linear $T : W_1 \to W_2$, então $T\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W_2$ é uma aplicação multilinear.

e) Dado V espaço vetorial e V^* seu dual e sejam $f_1, \ldots f_n \in V^*$então a aplicação:

$$\diamondsuit : V^n \to \mathbb{K}$$

$$\diamondsuit(v_1, \ldots v_n) = f_1(v_1) \cdots f_n(v_n)$$

é multilinear.

2 — Seguindo o esquema abaixo em que V e W são espaços vetoriais e s uma aplicação multilinear, explicite $f \circ t$ em cada considerando s a função trilinear definida no exercício 1b e 1c.

$$\begin{tikzcd} V \times V \cdots \times V \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "s"'] & V \otimes V \cdots \otimes V \arrow[d, dashed, "f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

3 — Seja $\mathcal{M}$, conjunto de todas as funções de suporte finito* que levam $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_p$ em $\mathbb{K}$

**Funções de Suporte Finito são aquelas em que apenas um conjunto finito de pontos do domínio tem imagem não nula*

a) Mostre que $\mathcal{M}$ é um espaço vetorial com soma e produto escalar usuais.

b) Exiba uma base para $\mathcal{M}$.

4 — Defina $\mathcal{M}_0$ o Espaço Vetorial gerado por funções em $\mathcal{M}$ do tipo: $f(u_1, \cdots, v_j + u_j, \cdots, u_p) - f(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_p) - f(u_1, \cdots, v_j, \cdots, u_p)$, $f(u_1, \cdots, au_j, \cdots, u_p) - af(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_p)$

a) Verifique que se $h \in \mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ então h é linear.

5 — Prove que $V \otimes K \simeq V$ das seguintes formas:

a)Achando bases de ambos os espaços.

b)Exibindo um isomorfismo natural (sem base)

c)Usando a formula $\dim(A \otimes B) = \dim A \dim B$

6 — Prove que $V \otimes W \simeq W \otimes V$ das seguintes formas:

a)Achando bases de ambos os espaços.

b)Exibindo um isomorfismo natural (sem base)

c)Usando a formula $\dim(A \otimes B) = \dim A \dim B$

7 — Prove que nem todos os vetores em $V \otimes V$, para $\dim V \geqslant 2$ são da forma $u \otimes v$.

8 — Prove que o conjunto das aplicações multilineares de $V_1 \times \cdots \times V_n$ em W é isomorfo ao conjunto das aplicações lineares de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ em W.

9 — Dado

$$S = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \lambda_\sigma(f) : T^q(L) \to T^q(L)$$

Mostre que:

a) $S(f)$ é um tensor simétrico, ou seja, para qualquer $\sigma \in S_q$, $\lambda_\sigma(f) = f$.

b) S é um operador idempotente, ou seja, $S^2 = S$

c) Se f é um tensor antisimétrico então calcule $S(f)$.

10 — Use o item anterior para calcular a dimensão de $S^q(L)$, o conjunto dos q-tensores simétricos.

11 — Dado

$$A(f) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sinal}(\sigma)\lambda_\sigma(f) : T^q(L) \to T^q(L)$$

Mostre que:

a) $A(f)$ é um tensor anti-simétrico, ou seja para qualquer $\sigma \in S_q$, $\lambda_\sigma(f) = \operatorname{sinal}(\sigma) f$.

b) A é um operador idempotente, ou seja, $A^2 = A$

c) Se f é um tensor simétrico então calcule $A(f)$.

d) Conclua que $\operatorname{im} A = \Lambda^q(V)$

12 — Seja $\Lambda^q(V)$, o o conjunto dos q-tensores antissimétricos sobre V.

a) Mostre que se $q > \dim(V)$ então todos os tensores antissimétricos em $\Lambda^q(V)$ são nulos.

b) Calcule a dimensão de $\Lambda^q(L)$, o conjunto dos q-tensores antissimétricos.

c) Calcule a dimensão de $\Lambda(L) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q(L)$.