7^o Lista - Álgebra Linear - BC1425

Autovalores e Autovetores

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$(x, y) \mapsto (y, 2y).$$
Mostre que $\lambda = 2$ é um autovalor de T e vetores da forma $(x, 2x)$ são os autovetores correspondentes.

2. Ache os autovalores e autovetores correspondentes das tranformações lineares dadas:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$
   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$
   d) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$
   e) $T : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$ tal que $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}'$ (Isto é, T é a transformação que leva uma matriz na sua transposta.)
   f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(x, y, z, w) = (x, x+y, x+y+z, x+y+z+w)$

3. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

4. Ache os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
   f) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quais são os autovalores e autovetores de A de um espaço vetorial:

   a) Real b) Complexo

6. Se λ é autovalor da transformação linear $T : V \to V$ e $\mathbf{v}$ é um autovetor associado a ele, mostre que

   a) $k\mathbf{v}$ é outro autovetor associado a λ se $k \neq 0$.

   b) O conjunto formado pelos autovetores associados a λ e o vetor nulo é subespaço de V.

7. Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Ache os autovalores de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{A}^{-1}$.

   b) Quais são os autovetores correspondentes?

8. Suponha que λ seja autovalor de $T : V \to V$ com autovetor $\mathbf{v}$ e α um número não nulo. Ache os autovalores e autovetores de αT.

9. Seja $T : V \to V$ lineares

   a) Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora.

   b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T?

10. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrizes inversíveis.

    a) Calcule $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ e observe que estes produtos são distintos.

    b) Encontre os autovalores de $\mathbf{AB}$ e os de $\mathbf{BA}$. O que você observa?

    c) Encontre os autovetores de $\mathbf{AB}$ e os de $\mathbf{BA}$. O que você nota?

    d) Motivado pelos itens anteriores, mostre que: se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes inversíveis de mesma ordem, os autovalores de $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ são os mesmos. Mostre mais ainda: se λ_1 é um autovalor de $\mathbf{AB}$ com autovetor $\mathbf{v}$, então λ_1 é autovalor de $\mathbf{BA}$ com autovetor $\mathbf{Bv}$. Da mesma forma, se λ_2 é um autovalor de $\mathbf{BA}$ com autovetor $\mathbf{w}$, então λ_2 é autovalor de $\mathbf{AB}$ com autovetor $\mathbf{Aw}$.