8º Lista - Álgebra Linear - BC1425

Diagonalização de Matrizes

1. Dizemos que uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ é *diagonalizável* se seu operador associado $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ for diagonlizável, ou seja, $\mathbf{A}$ é diagonalizável se, e somente se $\mathbf{A}$ admitir n autovetores LI. Baseado nisto, verifique qual(is) da(s) matriz(es) abaixo não são diagonalizáveis.

   a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

   b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

   c) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

   d) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

   e) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 0 & 4 & 0\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$

   f) $A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 14\\ 2 & -7 & 14\\ 2 & -4 & 11\end{pmatrix}$

   g) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 12 & 0 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2. Dada a matrizes

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

   a) $\mathbf{A}$ é diagonalizável? (use a difinição do exercício anterior).

   b) Encontre seu polinômio minimal.

3. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz 3×3 triangular superior, com todos os seus elementos acima da diagonal distintos e não nulos.

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}$$

a) Quais são os autovalores e autovetores de **A**?

b) Qual é o polinômio minimal de **A**?

4. Para quais valores de a as matrizes abaixo são diagonalizáveis?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é nilpotente se existir um número inteiro positivo n, tal que $T^n = 0$ (isto é, $T \circ T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T(\mathbf{v}) = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$).

a) Seja T nilpotente. Encontre seus autovalores.

b) Encontre uma matriz $A_{2\times 2} \neq 0$ tal que $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seja nilpotente.

c) Mostre que um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável.

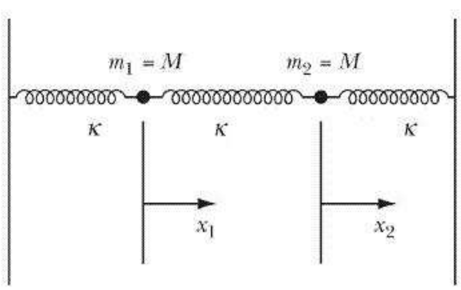
6. Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é idempotente se $T^2 = T$ (isto é, $T \circ T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in V$).

a) Seja T idempotente. Encontre seus autovalores.

b) Encontre uma matriz $A_{2\times 2} \neq 0$ tal que $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seja idempotente.

c) Mostre que um operador linear idempotente é diagonalizável.

7. Considere o sistema mecânico mostrado na figura abaixo cujas equações



de movimento são:

$$M\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$M\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + kx_2$$

a) Escreva as equações de movimento na forma matricial.

b) Queremos saber como x_1 e x_2 variam no tempo. Para isso tente desacoplar as equações diagonalizando a matriz do item acima e obtendo um sistema da forma:

$$\ddot{X}_1 = \lambda_1 X_1$$

$$\ddot{X}_2 = \lambda_2 X_2.$$

Quais são os autovalores e autovetores?

c) Resolva as equações e volte para as variáveis originais para obter

$$x_1 = A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_1\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \theta_2\right)$$

$$x_2 = A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_1\right) - A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \theta_2\right)$$

8. Por volta de 1200 (d.C.) Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, para descrever o crescimento de uma população de coelhos introduziu uma sequência recursiva de números que ficou conhecida como a Sequência de Fibonacci: $f(0) = 1$; $f(1) = 1$ e $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$. Assim temos a sequência: 1,1,2,3,5,8,13... Esses números descrevem o número de casais em uma população de coelhos depois de n meses, se for suposto que:

- no primeiro mês nasce apenas um casal;
- casais amadurecem sexualmente (e reproduzem-se) apenas após o segundo mês de vida;
- não há problemas genéticos no cruzamento consangüíneo;
- todos os meses, cada casal fértil dá a luz a um novo casal;
- os coelhos nunca morrem.

Podemos escrever a relação recursiva da seguinte maneira: $v_{n+1} = Av_n$, onde:

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_n = \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix}$$

a) Utilize a diagonalização de matrizes para determinar uma expressão geral para $f(n+1)$.

b) Pesquise sobre o número de ouro ou razão áurea e sua relação com este exercício.