9^{o} Lista - Álgebra Linear - BC1425

Produto Interno

1. Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores não nulos, dois a dois ortogonais, isto é, $< v_i, v_j >= 0$ para $i \neq j$. Prove que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI.

2. Prove que $| < v, w > | \leqslant \|v\|\|w\|$. (Desigualdade de Schwartz)

3. Prove que $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$. (Desigualdade Triangular) *Sugestão:* $\|v + w\|^2 =< v+w, v+w >$; desenvolva e use a desigualdade de Schwartz.

4. Comprove que as seguintes funções são produtos internos.

   a) $V = \mathbb{R}^n$; $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$; $< v, w >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

   b) $V = \mathbb{R}^2$; $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$; $< v_1, v_2 >= 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2$.

   c) $V = C[[0, 1], \mathbb{R}]$; f_1 e $f_2 \in V$; $< f_1, f_2 >= \int_0^1 f_1(t)f_2(t)dt$.

5. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$. Se $f(v_1, v_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$, mostre que f é um produto interno.

6. Seja $\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Use o processo de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno usual.

7. Seja $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$.Ache uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno usual.

8. Seja $\beta = \{(-1, 1), (1, 1)\}$. Ache uma base ortonormal β' de $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno definido no exercício 5.

9. Determine uma base ortonormal (em relação ao produto interno canônico) para o seguinte subspaço de $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$$

10. Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço gerado por $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$.

    a) Considere $W^\perp$ em relação ao produto interno canônico. Encontre uma base para $W^\perp$.

    b) A mesma pergunta anterior se $W^\perp$ é considerado em relação ao produto interno $< (x, y, z), (x', y', z') >= 2x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$.

11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$ e seja $W = kerT$.

    a) Encontre uma base ortonormal para $W^\perp$ (em relação ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$).

    b) O mesmo em relação ao produto interno

$$< (x, y, z), (x', y', z') >= 2x \cdot x' + y \cdot y' + 4z \cdot z'.$$

12. Considere o subspaço W de $\mathbb{R}^3$ gerado por $v_1 = (1,0,0)$,$v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,-1,-1)$. Sendo $<,>$ o produto interno canônico:

    a) Ache $W^\perp$.

    b) Exiba uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = W$ e $ker(T) = W^\perp$.

13. Seja $\mathbf{P}_2$ o espaço das funções polinomiais reais de grau menor ou igual a dois. Definimos em $\mathbf{P}_2$

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t) dt$$

    Considere W o subspaço de $\mathbf{P}_2$ gerado pelos vetores $p(t) = 1$ e $q(t) = 1-t$.

    a) $< f, g >$ é um produto interno?

    b) Se a resposta de (a) for afirmativa determine uma base ortogonal para W.

14. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\}$.

    a) Encontre $S^\perp$.

    b) Encontre uma base ortogonal para S e $S^\perp$.

    c) Se S fosse $[(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)]$, qual seria $S^\perp$? Neste caso encontre uma base ortogonal para S e $S^\perp$.

15. Seja, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes $M(2,2)$. Define-se

$$< \mathbf{A}, \mathbf{B} >= Tr(\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A})$$

    a) Verifique que $< \mathbf{A}, \mathbf{B} >$ é um produto interno.

    b) Exiba uma base ortonormal segundo este produto interno, a partir da base $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Um corpo é deslocado em linha reta do ponto $(-1,3)$ até o ponto $(5,2)$ por uma força constante $\mathbf{F} = (3,2)$. Qual é o trabalho realizado?

17. Uma partícula percorre a trajetória OABO onde O, A e B são os pontos $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$ respectivamente (a unidade de comprimento é o metro) com velocidade constante de 1 m/s. Se um campo elétrico induz uma força na partícula dada por

$$f = \begin{cases} (1,1,1) & se \quad 0 \leqslant t < 1 \\ (1,1,-1) & se \quad 1 \leqslant t < 2 \\ (1,-1,1) & se \quad 2 \leqslant t < 3 \\ (-1,1,1) & se \quad 3 \leqslant t < 4 \\ (-1,-1,-1) & se \quad t \geqslant 4 \end{cases} \tag{1}$$

    calcule o trabalho realizado para percorrer esta trajetória uma vez.

18. Em relação ao produto interno dado por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right\rangle = ae + 2bf + 3cg + dh$$

calcule x de modo que o ângulo entre $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ tenha uma medida de 90°.

Funções Ortogonais e Séries de Fourrier

19. Seja $\phi_n(x) = e^{inx}$ definida em $[-\pi, \pi]$. Verifique que $\phi_n(x)$ são funções ortogonais no intervalo, ou seja, que

$$(\phi_n(x) \cdot \overline{\phi_m}(x)) = \int_a^b \phi_n(x)\overline{\phi_m}(x)dx = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n,$$

$$(\phi_n(x) \cdot \overline{\phi_m}(x)) = \int_a^b \phi_n(x)\overline{\phi_m}(x)dx > 0 \quad \text{para} \quad m = n.$$

Encontre também a norma $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n(x) \cdot \overline{\phi_n}(x))}$.

20. O sistema de funções $\phi_n(x) = \sin(nx)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ é ortogonal no intervalo $[0, \pi]$. Determine os coeficientes de Fourrier,

$$c_n = \frac{(f \cdot \overline{\phi_n})}{\|\phi_n(x)\|^2},$$

da série

$$f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \qquad (0 \leq x \leq \pi).$$

Verifique que aquele sistema é completo em relação a esta função. Para isso você deve verificar que

$$\int_a^b = |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\phi_n\|^2.$$

21. Considere o sistema de funções $\phi_n(x) = \cos(\frac{n\pi x}{l})$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

    a) Mostre que o sistema é ortogonal no intervalo $[0, l]$
    b) Deduza a expressão dos coeficientes da série de Fourier associados à função $f(x)$ definida naquele intervalo.
    c) Calcule o valor dos coeficientes de Fourier para $f(x) = \frac{x}{l}$