Lista 1 - Álgebra Linear

Espaços Vetoriais

1 — Para os conjuntos seguintes, determine se os conjuntos dados são espaços vetoriais reais, se a adição e a multiplicação forem as usuais. Para aqueles que não forem diga quais axiomas de espaços vetoriais não são satisfeitos.

a) O conjunto das funções racionais

b) O conjunto das funções tais que $f(0) = 1 + f(1)$

c) O conjunto das funções reais crescentes.

d) O conjunto das funções reais ímpares.

e) O conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$

f) O conjunto das matrizes 2×2 cujo traço é zero

g) O conjunto das matrizes 2×2 cujo determinante é zero

h) O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfazem as equações lineares $5x + 2y = 0$ e $z = 0$

i) O conjunto das matrizes 3x3 triangulares superiores, i.e, o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

j) O conjunto das matrizes 3x3 triangulares estritamente superiores, i.e, o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 — Em $\mathbb{R}^2$ mantenhamos a definição de produto αv de um número por um vetor mas modifiquemos, de três maneiras diferentes, a definição de soma $u + v$ de vetores $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$.

Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados:

a) $u + v = (x + y', x' + y)$,

b) $u + v = (xx', yy')$,

c) $u + v = (3x + 3x', 5x + 5x')$.

3 — Para um conjunto V, seus elementos são representados por $v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, sendo $x_k > 0$, número real positivo. Definamos soma entre elementos como: $u \oplus v \equiv (x_1 y_1, x_2 y_2, \cdots, x_n y_n)$ e o produto por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ como $\alpha * v \equiv (x_1^{\alpha}, \cdots, x_n^{\alpha})$.

a) Prove que V é um espaço vetorial.

b) Explicite o elemento nulo de V.

4 — Dado K^{∞} o conjunto de todas as sequências com $a_i \in K$, com adição coordenada a coordenada e multiplicação por escalares coordenada a coordenada. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços:

a) O conjunto das sequências com apenas um número finito de coordenadas diferentes de zero.

b) Nenhuma coordenada igual a 1
Nos próximos itens $K = \mathbb{R}$

c) O conjunto das séries de Cauchy, ou seja, as sequencias tais que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que
$|x_n - x_m| < \epsilon$ para $n, m > N$.

d) As sequências tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

e) As sequências limitadas.

5 —

a) Prove que os únicos subespaços de $\mathbb{R}$, são o próprio $\mathbb{R}$ e o subespaço nulo

b) Prove que todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$ são o próprio $\mathbb{R}^2$, o subespaço nulo ou o subespaço consistindo de um múltiplo de um vetor fixo em $\mathbb{R}^2$.

c) Quais são todos os subespaços de $\mathbb{R}^3$?

6 — Sejam V um espaço vetorial e U, W subespaços de V. Prove que:

a) $U \cup W \subset U + W$

b) $U + W = W$ se e somente se $U \subset W$

c) $U + V = V$

7 — Dados W_1 e W_2 dois subespaços de um espaço vetorial V tal que a união deles seja subespaço. Prove que $W_1 \subset W_2$ ou que $W_2 \subset W_1$.

8 — Dado $S = \{(a, b, a + 2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ um subconjunto de um espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$:

a) Mostre que S é subespaço de $V = \mathbb{R}^3$.

b) Encontre um conjunto com exatamente dois elementos que seja um gerador para S.

c) Encontre um conjunto com exatamente três elementos que seja um gerador para S.

d) Encontre $A, B \subset \mathbb{R}^3$ tais que $A \cap B = \Phi$ e $span(A) = span(B) = S$.

9 — Dado $C[-1, 1]$ o espaço das funções contínuas em $[-1, 1]$. Quais dos seguintes funcionais sã o lineares

a) $f \to \int_{-1}^{1} f(x)dx$

b) $f \to \int_{-1}^{1} f^2(x)dx$

c) $f \to f(0)$ (delta de Dirac)

d) $f \to \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ com $g(x)$ uma função contínua fixa.