Lista 2

Funcionais Lineares, Axioma da Escolha, Base e Dimensão

1 — Mostre que $\mathbb{N}$ pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. (Dica: use o fato que existe uma bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$.

2 — Para os espaços abaixo, determine se são finito dimensionais e se sim determine a dimensão e uma base para o espaço:

a) Os números naturais visto como espaço vetorial sobre os racionais.

b) O conjunto de todas as sequências reais.

c) O conjunto das sequências reais que satisfazem $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ para $k \geqslant 3$

d) Os números complexos $\mathbb{C}$ visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e visto como um corpo sobre $\mathbb{R}$.

e) $\mathbb{C}^n$ visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

f) O conjunto das matrizes $m \times n$ sobre K, $M_{n\times m}(K)$.

g) O conjunto das sequências que com apenas um número finito de termos não nulos.

3 — Calcule a dimensão dos seguintes espaços e determine uma base:

a) O espaço dos polinômios de grau menor que p em n variáveis

b) O conjunto dos polinômios homogêneos de grau menor que p em n variáveis.

c) O conjunto das funções em $F(S)$, $|S| < \infty$ que se anulam em todos os pontos de um subconjunto $S_0 \subset S$.

d) O conjunto das sequências que com apenas um número finito de termos não nulos.

4 — Dado $W_1 \subset V$ e seja $\mathfrak{B}_1$ uma base para W_1 prove que existe uma base $\mathfrak{B}$ para V tal que $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$.

5 — Dado L um espaço vetorial n-dimensional e $M \subset L$ um subespaço m-dimensional. Prove que existem um número finito de funcionais $f_1, \dots, f_{n-m} \epsilon L^*$ tal que $M = \{l | f_1(l) = \dots . f_{n-m}(l) = 0\}$.

6 — Prove que se L é um subespaço de V e $\dim(L) = \dim(V) < \infty$, então $L = V$.

7 — Prove que o axioma de comutatividade da soma pode ser deduzido dos outros axiomas.

8 — Prove que em qualquer conjunto de vetores S existe um subconjunto S' linearmente independente tal que $\text{span}(S) = \text{span}(S')$. (Axioma da escolha)

9 — Pode um funcional linear sobre os complexos assumir apenas valores reais?

10 — Defina um funcional α em $\mathbb{C}^3$tal que $a((1,1,1) = 0$ e $\alpha(1,i,3)$=0.

11 — Dado α um funcional linear não-nulo num espaço vetorial V de dimensão n. Prove que $C = \{x : \alpha(x) = 0\}$ é um espaço vetorial. Qual a dimensão de C?

12 — Calcule todos os funcionais lineares de $\mathbb{Z}^3$. Qual a dimensão do espaço dos funcionais lineares sobre $\mathbb{Z}^3$?$^{\nVdash}$

13 — Seja $T \in \mathfrak{L}(V)$, e seja $L \subset V$ o subespaço de V tal que $L = \{v : f(T(v) = 0, \forall f \in V^*\}$. Prove que $L = \ker(T)$.

14 — Seja T a função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

a) Verifique que T é uma transformação linear
b) Determine a imagem de T
c) Determine o posto de T

15 — Dado $M_{n\times n}$(K) o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre K e seja B uma matriz fixa em $M_{n\times n}(K)$. Se $T(A) = AB - BA$, prove que T(A) é uma transformação linear de $M_{n\times n}$(K) em $M_{n\times n}$(K). Determine a imagem e o posto de T.

* **16** — Mostre que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$.