Geometria diferencial I
Segunda lista de exercícios

February 28, 2019

1. Obtenha a curvatura das seguintes curvas regulares
   (a) $\gamma(t) = \left(t, t^4\right), \; t \in \mathbb{R}$
   (b) $\gamma(t) = (\cos t\,(2\cos t - 1), \sin t\,(2\cos t - 1)) \; , \; t \in \mathbb{R}$ (cardióide)
   (c) $\gamma(t) = (t, \cosh t) \; , \; t \in \mathbb{R}$ (catenária)

2. Considere a elipse $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$. Obtenha os valores de t, em que a curvatura de γ é máxima e mínima.

3. Seja $r = r(\theta)$ uma curva regular dada em coordenadas polares. Verifique que o comprimento do arco da curva de θ_0 a θ_1 é dado por
$$l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$$
e a curvatura
$$k(\theta) = \frac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{\left(r^2 + (r')^2\right)^{3/2}}$$

4. Seja $\gamma(s)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s. A evoluta de γ é a curva definida por $c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)} n(s)$, em que $n(s)$ é o vetor normal e $k(s)$ a curvatura de γ. Prove que
   (a) $c(s)$ é uma curva diferenciável se $k(s) \neq 0 \; \forall s$
   (b) Suponha que $k(s) \neq 0 \; \forall s$, então $c(s)$ é regular se $k'(s) \neq 0 \; \forall s$.
   (c) Nas condições do item b) o vetor tangente à evoluta em s é paralelo ao vetor normal a α em s.

5. Verifique que a reta normal a γ em s é ortogonal à curva determinada pelos centros de curvatura nos pontos em que a curvatura de γ é máxima e mínima.

6. Caracterize todas as curvas regulares planas que têm curvatura constante.

7. Prove que toda curva regular plana cuja curvatura é da forma

$$k\left(s\right)=\frac{1}{as+b}\,,\ a\neq 0$$

é uma espiral logaritma.

8. Determine as curvas planas de curvatura $k\left(s\right)=\frac{1}{\cosh s}$.

9. Mostre que duas curvas com a mesma curvatura são congruentes.

10. Seja uma Isometria

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,$$

mostre que F é uma composição de uma Translação e uma Aplicação Ortogonal, unicamente definidas.