

Lista 3

Cálculo Vetorial

Integrais de Linha e o Teorema de Green

Parametrizações

1 — Encontre uma parametrização apropriada para a curva suave por partes em $\mathbb{R}^3$.

- a) intersecção do plano $z = 3$ com o cilindro elíptico

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

- b) A intersecção das superfícies $y = x$ e $z = x^3$, do ponto $(-3, -3, 9)$ a $(2, 2, 4)$.
c) O triângulo formado viajando do ponto $(1, 2, 3)$ para $(0, -2, 1)$, para $(6, 4, 2)$ e de volta para $(1, 2, 3)$.

Parte Técnica: para treinar cálculos de integral de linha

2 — Calcule as seguintes integrais de linha ao longo dos respectivos caminhos indicados:

- a) $F(x, y) = (x^2 - 2xy)\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j}$, entre os pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ ao longo da parábola $y = x^2$;
b) $F(x, y) = (y^2 - z^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, ao longo da trajetória $\gamma(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$;
c) $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (xz - y)\mathbf{k}$, ao longo do segmento de reta que liga $(0, 0, 0)$ e $(1, 2, 4)$;

- d) $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (xz - y)\mathbf{k}$, ao longo da trajetória $\gamma(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$.
e) Um campo de forças F é dado por $F(x, y) = cxy\mathbf{i} + x^6y^2\mathbf{j}$, onde c é uma constante positiva. Essa força age em uma partícula que se move do ponto $(0, 0)$ à reta $x = 1$, ao longo de uma curva $y(x) = ax^b$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Encontre o valor de a como função de c , para que o trabalho realizado pela força F seja independente de b .

3 — Calcule $\oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, onde C é o quadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$, percorrido no sentido anti-horário.

4 — Calcule $\int_{\gamma} dx + ydy + dz$, onde γ é a intersecção do plano $y = x$ com a superfície $z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$, sendo o sentido de percurso do ponto $(-1, -1, 2)$ para o ponto $(1, 1, 2)$.

5 — Um campo de forças f é definido no $\mathbb{R}^3$ pela equação

$$f(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + yz\mathbf{k}.$$

- a) Determine se f é um campo conservativo.
b) Calcule o trabalho realizado em mover uma partícula ao longo da curva descrita por
- 6 — Determine se os seguintes campos são conservativos. No caso afirmativo, determine uma função

potencial.

- a) $F(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
- b) $F(x, y, z) = ye^{-x}\mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$.

Teorema de Green

7 — Use o teorema de Green para calcular a integral de linha $\oint_{\gamma} y^2 dx + x dy$ quando

- a) γ é um quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$
- b) é uma circunferência de raio 2 centrada na origem.

8 — Use o teorema de Green para calcular a área da região limitada pelo eixo x e pelo arco da cicloide:

$$x = t - \sin(t), \quad y = 1 - \cos(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

9 — Use o Teorema de Green para avaliar as integrais de linha ao longo das curvas dadas orientadas positivamente.

- a) $\oint_{\gamma} x^2 y^2 dx + 4xy^3 dy$; γ é o triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,3)$ e $(0,3)$.
- b) $\oint_{\gamma} (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos(y^2)) dy$; γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

10 — Calcule $\oint_{\gamma} y^2 dx + 3xy dy$ em que γ é a fronteira orientada no sentido anti-horário da metade superior do disco unitário de duas formas diferentes:

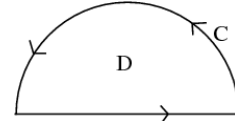
- a) diretamente;
- b) utilizando o Teorema de Green.

11 — Verifique o teorema de Green para a região D delimitada pelas retas $x = 2$, $y = 0$, $y = 2x$ e as funções $f(x, y) = (2x^2)y$, $g(x, y) = 2x^3$.

12 — Calcule

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy$$

onde C é o fronteira orientada no sentido anti-horário da metade superior do disco unitário, utilizando o Teorema de Green.



de duas maneiras diferentes.

- a) diretamente
- b) usando o teorema de Green

Parte Conceitual

13 — Mostre que a integral de linha de uma curva parametrizada diferenciável não depende da parametrização escolhida.

14 — Mostre que existem naturais m e n para os quais a forma diferencial

$$3x^{m+1}y^{n+1} dx + 2x^{m+2}y^n dy$$

é exata.

15 — Seja $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$ um campo vetorial, $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) = a_k(x_1, x_2, x_3) \mathbf{i}_k$, cujas funções componentes são contínuas em um aberto $A \subset \mathbb{R}^3$. Mostre que se $\mathbf{a}$ é um gradiente, então

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial a_j}{\partial x_k}(x_1, x_2, x_3)$$

16 — Considere a forma diferencial $u(x, y)P(x, y)dx + u(x, y)Q(x, y)dy$, onde P, Q e u são supostas de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Prove que uma condição necessária para que a forma diferencial seja exata em Ω é que

$$\frac{\partial u}{\partial y}P - \frac{\partial u}{\partial x}Q = u \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \text{ em } \Omega.$$

17 — Determine $u(x, y)$ que só depende de x tal que $(x^3 + x + y)u(x, y)dx - xu(x, y)dy$ seja exata.

18 — Suponha $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ num aberto $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Prove que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ é irrotacional se, e somente se,

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = 0,$$

para toda curva γ , fechada, simples, orientada positivamente e fronteira de um compacto $K \in \Omega$ de $\mathbb{R}^2$.

19 — Prove que se $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ for constante sobre $\text{Im}\gamma$ então o fluxo de $\mathbf{F}$ através de γ é o produto de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ pelo comprimento de γ , onde $\mathbf{n}$ é a normal a γ .

20 — Seja $\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha} \mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^\alpha} \mathbf{j}$. Determine α para que $\mathbf{F}$ seja solenoidal.

21 — Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ duas funções a valores reais, de classe $\mathcal{C}^2$, no aberto Ω de $\mathbb{R}^2$. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ uma curva regular, fechada, simples, orientada no sentido anti-horário, fronteira de um compacto K , com interior não vazio e contido em Ω . Seja $\mathbf{n}$ a normal exterior a K . Prove que:

- $\oint_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_K \Delta g \, dx dy$ ($\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}$ é a derivada direcional de g na direção $\mathbf{n}$ e Δg é o laplaciano de g).
- $\oint_{\gamma} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_K (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dx dy$ (**Primeira identidade de Green**).
- $\oint_{\gamma} f \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_K (f \Delta f + \|\nabla f\|^2) \, dx dy$
- $\oint_{\gamma} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) ds = \iint_K (f \Delta g - g \Delta f) \, dx dy$ (**Segunda identidade de Green**).

22 — Seja $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ no aberto Ω e sejam γ e K como no exercício anterior. Prove

que se $\Delta v = 0$ no interior de K e $v(\gamma(t)) = 0$ em $[a, b]$, então $v(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in K$.

23 — Um campo de forças $\mathbf{f}$ radial ou central no plano é da forma $\mathbf{f}(x, y) = f(r) \mathbf{r}$, em que $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ e $r = \|\mathbf{r}\|$. Mostre que esse campo é conservativo.

24 — Considere o campo

$$\mathbf{a}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

definido em todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$.

- Mostre que $\partial_1 a_2 = \partial_2 a_1$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Mostre que $\mathbf{a}(x, y)$ não é um gradiente.

25 — Defina o conjunto $A = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid y = 0, x \geq 0\}$. Se $(x, y) \in A$, considere $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$. Considere $\theta(x, y)$ dado por

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{se } x > 0, y > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{se } x < 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{se } x > 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0, y > 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{se } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Mostre que

$$\nabla \theta = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \text{ em } A.$$

26 — Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva diferenciável regular, $\|\gamma'\| \neq 0$. A normal unitária à curva γ é definida pela equação

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\gamma'\|} (y'(t), -x'(t)).$$

Se ϕ é um campo escalar com gradiente $\nabla \phi$ em γ , então a derivada normal $\partial \phi / \partial n$ em γ é dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n}.$$

Mostre que:

Aplicações dos conceitos de integral de linha

- a) Se $\mathbf{F} = Q\mathbf{i} - P\mathbf{j}$, então

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

em que a integral de linha é em termos do comprimento de arco $ds = \|\gamma'\| dt$.

- b)

$$\oint_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_S \nabla^2 g dx dy$$

- c)

$$\oint_{\gamma} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = \iint_S \left(f \nabla^2 g - g \nabla^2 f \right) dx dy$$

27 — A transformação que relaciona as coordenadas cartesianas x, y, z às coordenadas cilíndricas elípticas u, v, z é dada pela equações

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \sinh u \sin v, \quad z = z$$

($u \geq 0, 0 \leq v < 2\pi, a > 0$ constante). Mostre que o comprimento do arco no novo sistema de coordenadas é dado por

$$ds^2 = a^2 (\cosh^2 u - \cos^2 v) (du^2 + dv^2) + dz^2.$$

28 — Considere o sistema de coordenadas u, v, w definido por

$$u = x - y, \quad v = y + z, \quad w = x - z$$

Encontre a expressão do comprimento de arco ds no sistema de coordenadas (u, v, w) .

29 — Considere o sistema de coordenadas u, v, w definido por

$$u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \quad (1)$$

$$v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \quad (2)$$

$$w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \quad (3)$$

- a) Quando u, v, w forma um sistema ortogonal?

- b) Encontre a expressão do comprimento de arco ds no sistema de coordenadas (u, v, w)

30 — Determine a massa do fio que tem a forma da curva que intercepta a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e o plano $x + y + z = 0$ se a densidade do fio em (x, y, z) é x^2 .

31 — Experimentos mostram que uma corrente estacionária I em um fio comprido produz um campo magnético $\mathbf{B}$ que é tangente a qualquer circunferência contida num plano perpendicular ao fio e cujo centro pertence ao eixo do fio. A Lei de Ampère relaciona a corrente elétrica aos seus efeitos magnéticos e afirma que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I,$$

onde I é a corrente total que passa através de qualquer superfície limitada por uma curva fechada C e μ_0 é uma constante chamada de permeabilidade de espaço livre. Tomando C como uma circunferência com raio r , mostre que a magnitude $B = \|\mathbf{B}\|$ do campo magnético a uma distância r do centro do fio é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

32 —

- a) Suponha que $\mathbf{F}$ represente o campo força inverso quadrado, isto é,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

para alguma constante c , onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Encontre o trabalho feito pela força $\mathbf{F}$ para mover um objeto de um ponto P_1 ao longo de um caminho até um ponto P_2 , em termo das distâncias d_1 e d_2 destes pontos à origem.

- b) Um exemplo de um campo força inverso quadrado é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$. Encontre o trabalho feito pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1,52 \cdot 10^8$ Km do Sol) para o periélio (em uma distância mínima de $1,47 \cdot 10^8$ Km do Sol). Use os valores $m = 5,97 \cdot 10^{24}$ Kg, $M = 1,99 \cdot 10^{30}$ Kg e $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m²/Kg².

33 — A integral de linha de um campo escalar F sobre um caminho γ em relação ao comprimento de arco é definida por:

$$\int_{\gamma} F(X) ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Calcule a integral de linha em relação ao comprimento de arco $\int_{\gamma} 2x ds$, onde γ é o caminho formado pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$, seguido de um segmento de reta C_2 de $(1,1)$ a $(2,2)$.

34 — Um fio delgado no espaço pode ser pensado como a imagem de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se $\delta(x, y, z)$ é a densidade linear (massa por unidade de comprimento) do fio no ponto (x, y, z) , a massa do fio é definida pela integral de linha da densidade em relação ao comprimento de arco $M = \int_{\gamma} \delta(x, y, z) ds$. Calcule a massa de um fio dado pela imagem da curva $\gamma(t) = (t, t, t)$, $t \in [0, 2]$, de densidade linear $\delta(x, y, z) = xyz$.

Respostas dos Exercícios

1 a.) A curva é uma elipse no plano $z = 3$. Podemos parametrizar:

$$x = 3 \cos t, \quad y = 4 \sin t, \quad z = 3, \quad t \in [0, 2\pi]$$

b.) Usando x como parâmetro:

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t^3, \quad t \in [-3, 2]$$

c.) Segmento 1: $(1, 2, 3)$ para $(0, -2, 1)$

$$\gamma_1(t) = (1 - t, 2 - 4t, 3 - 2t), \quad t \in [0, 1]$$

Segmento 2: $(0, -2, 1)$ para $(6, 4, 2)$

$$\gamma_2(t) = (6t, -2 + 6t, 1 + t), \quad t \in [0, 1]$$

Segmento 3: $(6, 4, 2)$ para $(1, 2, 3)$

$$\gamma_3(t) = (6 - 5t, 4 - 2t, 2 + t), \quad t \in [0, 1]$$

2 a.) Parametrização: $x = t, y = t^2, t \in [-1, 1]$

$$\mathbf{F}(t) = (t^2 - 2t^3, t^4 - 2t^3), \quad \gamma'(t) = (1, 2t)$$

$$\mathbf{F} \cdot \gamma' = t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4$$

$$\int_{-1}^1 (t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4) dt = 2 \int_0^1 (t^2 - 4t^4) dt = -\frac{14}{15}$$

b.)

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) = (t^4 - t^6, 2t^5, -t^2), \quad \gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$\mathbf{F} \cdot \gamma' = -2t^4 + 3t^6$$

$$\int_0^1 (-2t^4 + 3t^6) dt = \frac{1}{35}$$

c.) $\gamma(t) = (t, 2t, 4t), t \in [0, 1]$

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) = (t, 2t, 4t^2 - 2t), \quad \gamma'(t) = (1, 2, 4)$$

$$\mathbf{F} \cdot \gamma' = -3t + 16t^2$$

$$\int_0^1 (-3t + 16t^2) dt = \frac{23}{6}$$

d.)

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) = (t^2, 2t, 4t^4 - 2t), \quad \gamma'(t) = (2t, 2, 8t)$$

$$\mathbf{F} \cdot \gamma' = 2t^3 + 4t + 32t^5 - 16t^2$$

$$\int_0^1 (2t^3 + 4t + 32t^5 - 16t^2) dt = \frac{5}{2}$$

e.)

$$W = \int_0^1 [cxy + x^6 y^2 y'] dx$$

Com $y = ax^b, y' = abx^{b-1}$:

$$W = \int_0^1 [cax^{b+1} + a^3bx^{6+3b-1}] dx = \frac{ca}{b+2} + \frac{a^3b}{3b+6}$$

Para ser independente de b : $a^2 = c$.

3 Por simetria, em cada quadrante $|x| + |y|$ é constante nas arestas. A integral total é 0.

4 Parametrização: $x = t, y = t, z = 2t^2, t \in [-1, 1]$

$$dx = dt, \quad dy = dt, \quad dz = 4t dt$$

$$\int_{-1}^1 (1 + t + 4t) dt = \int_{-1}^1 (1 + 5t) dt = 2$$

5

$$\nabla \times \mathbf{f} = (z - 1, 0, -1) \neq \mathbf{0}$$

Não é conservativo.

6 a.)

$$\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 0)$$

É conservativo. Potencial: $\phi(x, y, z) = xyz + C$

b.)

$$\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, -2e^{-x}) \neq \mathbf{0}$$

Não é conservativo.

7 a.)

$$\iint_D (1 - 2y) dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 - 2y) dx dy = 8$$

b.)

$$\iint_D (1 - 2y) dA = 4\pi$$

8 Área = $\oint_C x dy = \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t dt = 3\pi$

9 a.)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4y^3 - 2x^2y$$

$$\iint_D (4y^3 - 2x^2y) dA = \frac{81}{5}$$

b.)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Área = $\frac{1}{3}$, portanto integral = $\frac{1}{3}$

10 b.)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y$$

$$\iint_D y dA = \frac{2}{3}$$

11 Ambos os lados resultam em 32.

12

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y$$

$$\iint_D y dA = \frac{2}{3}$$

13 Mudança de variável na integral mostra a invariância.

14

$$3(n+1) = 2(m+2) \Rightarrow m = 2, n = 1$$

15 Segue do teorema de Schwarz para as derivadas mistas do potencial.

16

$$\frac{\partial u}{\partial y} P - \frac{\partial u}{\partial x} Q = u \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

17

$$u'(x) = \frac{2}{x} u(x) \Rightarrow u(x) = Cx^2$$

18 Equivalência entre campo conservativo e integral nula sobre curvas fechadas.

19

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \int_{\gamma} ds$$

20

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{2(1-\alpha)}{(x^2+y^2)^\alpha} \Rightarrow \alpha = 1$$

21 a.) Uma curva fechada divide o plano em dois pedaços. Um limitado e um ilimitado. Se você considerar o pedaço interior unido com a curva, temos um conjunto fechado e limitado. Um conjunto fechado e limitado é denominado compacto.

Suponha que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então $\gamma' = (x', y')$. Dessa forma $\mathbf{n} = (-y', x')$ e $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$

Observe ainda que

$$ds = \|\gamma'\| dt = \|\mathbf{n}\| dt$$

Finalmente observe que

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = \nabla g \cdot \hat{\mathbf{n}} = (-\partial_1 g y' + \partial_2 g x') \frac{1}{\|\mathbf{n}\|}$$

e assim

$$\oint_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} ds = \oint_{\gamma} -\partial_1 g y' + \partial_2 g x' dt$$

$$\oint_{\gamma} -\partial_1 g dy + \partial_2 g dx$$

O resultado segue direto do Teorema de Green.

22 Usando identidade de Green mostra que $\nabla v = 0$.23 Potencial $\phi(r) = \int f(r) r dr$.

24 a.) Ambas derivadas iguais a $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

b.) $\oint_{x^2+y^2=1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \neq 0$.

25 Cálculo direto das derivadas parciais de θ .

26 Aplicações do teorema da divergência e identidades vetoriais.

27

$$ds^2 = a^2(\cosh^2 u - \cos^2 v)(du^2 + dv^2) + dz^2$$

28

$$ds^2 = \frac{3}{4}(du^2 + dv^2 + dw^2) - \frac{1}{2}(dudv + dudw + dvdw)$$

29 Ortogonal se matriz for ortogonal.

30 Massa = π

31 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

32 Trabalho = $\frac{c}{d_2} - \frac{c}{d_1}$

33 Total = $\frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 3\sqrt{2}$

34 $M = 4\sqrt{3}$