Lista 3

Soma Direta, dual, Quocientes e Isomorfismos

1 — Prove que se $\mathfrak{B}$ é base para V e $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \bigsqcup \mathfrak{B}_2$ então $V = \text{span}(\mathfrak{B}_1) \oplus \text{span}(\mathfrak{B}_2)$

2 — Prove que a soma $L = L_1 + L_2 + \dots . L_n$ é soma direta se e somente se a união das bases de L_i produz uma base para L.

3 — Dados $M, N \subset L$. Prove que a seguinte aplicação é um isomorfismo linear

$$(M + N)/N \to M/(M \cap N) : m + n + N \mapsto m + M \cap N$$

4 — Seja P_k o conjunto dos polinômios de grau menor igual que n.

a) Prove que o conjunto de todos os polinômios pares L_1, i.e, $p(x) = p(-x)$, e o conjunto de todos os polinômios impares, i.e, $p(x) = -p(-x)$ L_2 são subespaços vetoriais.

b) Prove que $P_k(x) = L_1 \oplus L_2$

c) Ache o subespaço complementar a $L_3 = \{p(x) \in P_k : p(1) = 0\}$

5 — Prove que para qualquer n

$$\dim (L_1 + L_2 + \dots . + L_n) < \dim (L_1) + \dim (L_2) + \dots . + \dim (L_n)$$

6 — Dado $L = M \oplus N$. Então a aplicação canônica

$$M \to L/N : m \mapsto m + N$$

é um isomorfismo.

7 — Dados $S, T, U \subset V$. Mostre que se $U \subset S$, então

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + (S \cap U)$$

8 — Dado L um subespaço de V. O conjunto $v + S = \{v + s : s \in S\}$ é chamado subespaço afim de V.

a) Quando um subespaço afim de V é subespaço de V?
b) Mostre que dois subespaços afim $x + S$ e $y + S$ ou são iguais ou disjuntos.

9 — Dado $\tau \in \mathfrak{L}(V, W)$. Mostre que τ é isomorfismo se e somente se τ leva base em base.

10 — Dados dois espaços vetoriais V, W sobre $\mathbb{F}$. Definimos $V \boxplus W$ como o conjunto $\{(v, w) : v \in V \text{ e } w \in W\}$ munido das operações

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Prove que $V \boxplus W$ é espaço vetorial. O espaço $V \boxplus W$ é chamado soma direta externa de V e W.

11 — Seja $V = A + B$ e seja a soma direta externa $E = A \boxplus B$. Defina a aplicação $\tau : A \boxplus B \to A + B$ como $\tau : (a, b) = a + b$. Prove que tal é linear. Qual o kernel de τ? Quando τ é um isomorfismo.

12 — Dado $\tau : V \to W$, a dim (im(τ)) é chamado de posto de τ (o posto de τ é denotado rk(τ)). Prove que:
a) Se $\dim(V) < \infty$ e $\tau \in \mathfrak{L}(V, W)$ e $\mathrm{rk}(\tau^2) = \mathrm{rk}(\tau)$ então $\mathrm{im}(\tau) \cap \ker(\tau) = \{0\}$.
b) Dado $\tau \in \mathfrak{L}(U, V)$ e $\sigma \in \mathfrak{L}(V, W)$ então $\mathrm{rk}(\sigma\tau) \leqslant \min\{\mathrm{rk}(\sigma), \mathrm{rk}(\tau)\}$.
c) Se $\tau, \sigma \in \mathfrak{L}(V)$e τ é invertível então $\mathrm{rk}(\sigma\tau) = \mathrm{rk}(\tau\sigma) = \mathrm{rk}(\sigma)$.
d) Se $\tau, \sigma \in \mathfrak{L}(U, V)$ então $\mathrm{rk}(\tau + \sigma) \leqslant \mathrm{rk}(\tau) + \mathrm{rk}(\sigma)$.

13 — Dado $\tau \in \mathfrak{L}(V_1, W_1)$ e $\mathrm{rk}(\tau^2) = \mathrm{rk}(\tau)$ mostre que $\mathrm{im}(\tau) \cap \ker(\tau) = \{0\}$.

14 — Dado $\tau \in \mathfrak{L}(V)$ e S um subespaço de V. Defina a aplicação $\tau' : V/S \to V/S$ por

$$\tau'(v + S) = \tau v + S$$

Quando τ' está bem definida e é uma aplicação linear? Quais são $\mathrm{im}(\tau')$ e $\ker(\tau')$.

15 — Seja $P_k(x)$ o espaço dos polinômios de grau menor que k e seja A_h o operador diferença

$$A_h(p(x)) := \frac{p(x + h) - p(x)}{h}$$

sendo h um número fixo não nulo. Ache o núcleo e a imagem desse operador.

16 — Dado V um espaço vetorial de dimensão finita e seja S e T transformações lineares em V. Quando existem bases $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ tal que $[S]_{\mathfrak{B}_1} = [T]_{\mathfrak{B}_2}$?

17 — **(Importante)** Dado V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ e seja $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ uma base para V.

a) Prove que existe um único operador linear $T : V \to V$ tal que $T(\alpha_j) = \alpha_{j+1}$ e $T(\alpha_n) = 0$. Escreva a matriz de T nessa base.

b) Prove que $T^n = 0$, mas $T^{n-1} \neq 0$

c) Seja S um operador linear em V tal que $S^n = 0$ mas $S^{n-1} \neq 0$. Prove que existe uma base $\mathfrak{B}'$ tal que a matriz para S nessa base é a matriz descrita na parte a.

d) Prove que se M e N são matrizes $n \times n$ tal que $M^n = N^n = 0$ mas $M^{n-1} \neq 0 \neq N^{n-1}$, então M e N são similares.

18 — Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que $T^2 = 0$ se e somente se $T(V) \subset \ker(T)$.

19 —

a) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \langle (1, 0, -1), (1, 2, 2) \rangle$.

b) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \langle (1, 0, -1) \rangle$.

20 — Dado V o espaço vetorial dos polinômios reais de grau menor igual que 2

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Defina três funcionais lineares em V por:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx$$
$$f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx$$
$$f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)\,dx$$

Mostre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é base para V^* exibindo uma base para V que é dual a essa base.

21 — Determine a nulidade e o posto das seguintes transformações lineares e construa uma base para o núcleo e a imagem das seguintes transformações lineares:

a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Ax = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$

c) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Ax = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$

22 — Dado V um espaço vetorial tal que $\dim V = n$. Prove que se $m < n$ e $f_1, \ldots, f_m$ são funcionais lineares em V. Então existe um vetor não nulo $x \in V$ tal que $f_i(x) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. O que esse resultado implica para a solução de sistemas lineares?

23 — Prove detalhadamente que dado $\tau \in \mathfrak{L}(V)$, então temos:

$$\frac{V}{\ker(\tau)} \approx \operatorname{im}(\tau)$$

24 — Seja $A = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$ o conjunto das letras

a) Prove que o conjunto das funções complexas $\mathbb{C}(A) = \{f : f : A \to \mathbb{C}\}$ é espaço vetorial sobre os complexos.

b) Ache uma base para esse espaço, visto como espaço vetorial sobre os complexos. Qual a dimensão desse espaço sobre os complexos?

c) Prove que o subconjunto das funções $D \subset \mathbb{C}(A)$ que se anulam nas letras $\{d, a, n, i, e, l\}$ formam um espaço vetorial. Ache uma base para esse espaço.

d) Dado σ uma função $\sigma : A \to A$. Seja $\tilde{\sigma} : \mathbb{C}(A) \to \mathbb{C}(A)$ definida por $\tilde{\sigma}(f(x) = f(\sigma(x)$. Prove que $\tilde{\sigma}$ é uma transformação linear.

e) Prove que se $\sigma : A \to A$ é bijetiva então $\tilde{\sigma}$ é um isomorfismo de $\mathbb{C}(A) \to \mathbb{C}(A)$

f) Seja Σ o conjunto de todas as transformações lineares provenientes de uma função $\sigma : A \to A$ ou seja.

$$\Sigma = \{T \in \mathfrak{L}(\mathbb{C}(A) : T(f(x) = f(\sigma(x)) : \forall x \in A, \text{ para alguma } \sigma\}$$

Qual a dimensão de Σ?