Geometria diferencial I
Terceira lista de exercícios (Para Apoio - Não precisa Entregar)

March 15, 2019

1. Considere as seguintes curvas regulares:

    (a) $\alpha(t) = (4\cos t, 5 - 5\sin t, -3\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$
    (b) $\beta(t) = (1 - \cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$
    (c) $\gamma(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}$
    Reparametrize essas curvas por comprimento de arco, obtenha o triedro de Frenet, a curvatura e a torção de cada curva.

2. Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, tal que $k(s) > 0$, $\forall s \in I$. Obtenha $\gamma'''(s)$ como combinação linear do triedro de Frenet de γ em s.

3. Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é uma hélice se existe um vetor v tal que $\alpha'(t) \cdot v$ é constante para todo $t \in I$. Verifique que as seguintes curvas são hélices:

    (a) $\alpha(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right)$, $t \in \mathbb{R}$
    (b) $\beta(t) = \left(t + \sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \sin t\right)$, $t \in \mathbb{R}$

4. Sejam $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ um curva regular, $v = \alpha'$ e $a = \alpha''$. Mostre que a torção de α é dada por

$$\tau(s(t)) = \frac{\left(v \times \frac{da}{dt}\right) \cdot a}{\|v \times a\|^2}$$

5. Verifique que toda curva regular de $\mathbb{R}^3$ cujas funções coordenadas são polinômios de grau menor ou igual a dois é uma curva plana.

6. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que:

    (a) Se para cada $t \in I$ os vetores $\alpha''(t)$ e $\alpha'(t)$ são colineares, então $\alpha(I)$ é um segmento de reta.
    (b) Se todas as retas tangentes a α têm um ponto em comum, então o traço de α é um segmento de reta.

7. Mostre que se todos os planos osculadores de uma curva α têm um ponto em comum, então a curva α é plana.

8. Dada $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, chamamos de indicatriz esférica tangente de α a curva sobre a esfera unitária dada por

$$\begin{aligned} \alpha^* &: I \to \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto \alpha^*(s) = t(s) \end{aligned}$$

   (a) Mostre que $k(s) = \frac{ds^*}{ds}$, em que s^* é o comprimento de arco para α^*.

   (b) Descreva a indicatriz esférica tangente de retas, curvas planas, circunferências e hélices.

9. Mostre que se $\alpha(s)$ (parametrizada por comprimento de arco) tem torção constante $\tau \neq 0$, então a curva

$$\gamma(s) = -\frac{1}{\tau} n - \int_{s_0}^{s} b(\lambda)\, d\lambda$$

tem curvatura constante igual a $\pm\tau$.

10. Seja α uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, com $k(s) > 0$. A reta normal a α em s é a reta que passa por $\alpha(s)$ na direção de $n(s)$. Prove que se todas as retas normais têm um ponto em comum, então $\alpha(I)$ está contida numa circunferência.

11. Se T_a indica translação por a e C uma transformação ortogonal, verifique que $C \circ T_a = T_{C(a)} \circ C$.

12. Prove que toda isometria F do $\mathbb{R}^3$ possui inversa F^{-1} que também é uma isometria. Se $F = T_a \circ C$, obtenha F^{-1}como composta de uma translação e uma transformação ortogonal.

13. Verifique que as seguintes funções são isometrias do $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, obtenha a função como composta de uma translação e uma transformação ortogonal.

   (a) $F(x, y, z) = (x, y, z)$

   (b) $F(x, y, z) = (2 - y, z - 3, x + 1)$

   (c) $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - z, \sqrt{2}y, x + z\right)$

14. Considere os pontos $p = (1, -2, 0)$ e $q = (0, 0, 1)$ e os referenciais $\upsilon_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\upsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\upsilon_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $w_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $w_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $w_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Obtenha a isometria F do $\mathbb{R}^3$ tal que $F(p) = q$ e $F_{*p}(\upsilon_i) = \omega_i$ para $i = 1, 2, 3$.

15.

   (a) Verique que toda translação preserva orientação.

   (b) Verifique que a isometria $F(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ inverte orientação.

16. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação diferenciável tal que, $\forall p \in \mathbb{R}^3$, F_{*p} preserva produto interno. Prove que F é uma isometria.

17. Verifique que a curva $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, e a curva $\beta(t) = \left(t + \sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \sin t\right)$ são congruentes. Obtenha a isometria F tal que $F \circ \alpha = \beta$.

18. Sejam α,$\bar{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ curvas regulares, parametrizadas por comprimento de arco, tal que, para cada $s \in I$, a curvatura e a torção de α e $\bar{\alpha}$ em s não se anulam. Prove que, se os vetores binormais das duas curvas coincidem, isto é, $b(s) = \bar{b}(s)$, então α e $\bar{\alpha}$ são congruentes.