# Geometria diferencial I
# Quarta lista de exercícios

1. Encontre um atlas que parametrize um toro de raio maior $a$ e raio menor $r$. Prove, a partir da parametrização, que se trata de uma superfície regular.

2. Construa dois atlas para a esfera dada por $x^2+y^2+z^2=1$ , o primeiro a partir da parametrização de longitude e co-latitude e o segundo a partir de projeções esterográficas. Descreva as vizinhanças coordenadas e prove, a partir das parametrizações, que são superfícies regulares.

3. Descreva o traço das seguintes superfícies parametrizadas regulares e, restringindo convenientemente os domínios, verifique que, em cada caso, uma é reparametrização da outra:

   (a) $x\left(u,v\right)=\left(u,v,0\right)$, $\left(u,v\right)\in\mathbb{R}^2$ e $y\left(\eta,\xi\right)=\left(\eta\cos\xi,\eta\sin\xi,0\right)$, $\eta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\xi\in\mathbb{R}$.

   (b) $x\left(u,v\right)=\left(au\cosh v,bu\sinh v,u^2\right)$, $u,v\in\mathbb{R}$, $u\neq 0$ e $y\left(\eta,\xi\right)=\left(a\left(\eta+\xi\right),b\left(\eta-\xi\right),4\eta\xi\right)$, $\left(\eta,\xi\right)\in\mathbb{R}^2$.

4. Obtenha as parametrizações cujas vizinhanças coordenadas cobrem a superfície regular e, em cada caso, descreva as superfícies e as curvas coordenadas (em todos os casos $a,b,c>0$)

   (a) $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$

   (b) $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right\}$

   (c) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$

5. Verifique que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são superfícies regulares:

   (a) $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0,0,0\}|z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ (cone de uma folha se o vértice)

   (b) $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0,0,0\}|x^2+\left(3y^2-z\right)^2=1\right\}$

6. Verifique que uma reparametrização do catenóide $x\left(u,v\right)=\left(u,\cosh u\cos v,\cosh u\sin v\right)$, $\left(u,v\right)\in\mathbb{R}^2$, é dada por $y\left(\eta,\xi\right)=\left(\sinh^{-1}\eta,\sqrt{1+\eta^2}\cos\xi,\sqrt{1+\eta^2}\sin\xi\right)$, $\left(\eta,\xi\right)\in\mathbb{R}^2$. Obtenha a mudança de parâmetros.

7. Verifique que a aplicação $x\left(u,v\right)=\left(a\sin u\cos v,b\sin u\sin v,\cos u\right)$, em que $a,b>0$, $0<u<\pi$, $0<v<2\pi$ é uma parametrização de um elipsóide menos uma semi-elipse; descreva as curvas coordenadas desta parametrização.

8. Seja $f\left(x,y,z\right)=z^2$. Verifique que $c=0$ não é um valor regular de $f$, mas $f^{-1}\left(0\right)$ é uma superfície regular.