

Lista 4

Cálculo Vetorial

Integrais de Superfícies e os Teoremas de Gauss e de Stokes

1 — Descreva as parametrizações e calcule o vetor normal associado a essas parametrizações para as seguintes superfícies

- Esfera
- Toro
- Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + 1$ sobre o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 4)$
- Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- Cilindro circular $x^2 + y^2 = r^2$ com $a \leq z \leq b$.

2 — Calcule a área das seguintes superfícies usando integral de superfície

- Esfera.
- Toro
- Cilindro circular $x^2 + y^2 = r^2$ com $a \leq z \leq b$.

3 — Calcule o fluxo do campo vetorial

- $F(x, y, z) = (xz, yz, -z^2)$ para fora da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = 1 + x^2 + y^2, 2 \leq z \leq 3\}.$$

- $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{k}$ e S é a parte do cone

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 2u \mathbf{k}$$

com $0 \leq u \leq \sin v$, $0 \leq v \leq \pi$ com o vetor normal apontado para cima.

4 — Calcule o fluxo do campo de vetores

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x, y, z)$$

através do sólido R limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

5 — Use o teorema de Stokes pra transformar a integral de superfície $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ numa integral de linha e resolva a integral, em que $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$, e S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com $z \geq 0$ e normal $\mathbf{n}$ com componente z não negativa.

6 — Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = \sqrt{x^2 + y^2}; 1 \leq z \leq 3\}$. Calcule $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, em que $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, -xz, z^3)$.

7 — Utilize o Teorema da Divergência para calcular as integrais de superfície $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ do campo de vetor $\mathbf{f}(x, y, z)$ ao longo da superfície S .

- $\mathbf{f}(x, y, z) = x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 3z \mathbf{k}$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$

- $\mathbf{f}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, S : Bordo de um cubo sólido $S = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$

- $\mathbf{f}(x, y, z) = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

- $\mathbf{f}(x, y, z) = 2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + 5 \mathbf{k}$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

8 — Um campo escalar ϕ satisfaz $\|\nabla\phi\|^2 = 4\phi$ e $\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) = 10\phi$. Calcule $\iint_S \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$, onde S é a esfera unitária e n é a normal à esfera.

$1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Seja $\vec{n}$ a normal apontando para fora do cubo. Mostre que $\iint_\sigma \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$.

9 — Seja

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

onde q é uma constante não-nula.

- Calcule $\nabla \cdot \vec{E}$;
- Calcule o fluxo de $\vec{E}$ através da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com normal $\vec{n}$ apontando para fora da esfera;
- Calcule o fluxo de $\vec{E}$ através da superfície esférica $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$, com normal $\vec{n}$ apontando para fora da esfera.

10 — Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$ e seja $\vec{u}$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω . Suponha que

$$\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0,$$

para toda superfície esférica σ , com normal exterior $\vec{n}$, contida em Ω . Prove que $\vec{u}$ é solenoidal em Ω .

11 — Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. Seja σ a fronteira do conjunto

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\},$$

com normal $\vec{n}$ apontando para fora de K . Mostre que $\iint_\sigma \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$.

12 — Mostre que o Teorema de Green é um caso especial do Teorema de Stokes.

13 — Seja $\vec{F}$ um campo de classe $\mathcal{C}^1$ num aberto contendo a fronteira do cubo $\{0 \leq x \leq$

14 — Seja S a superfície do cubo unitário $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, e seja n o vetor unitário normal exterior a S . Se $F(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, use o teorema do divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$. Verifique o resultado calculando a integral de superfície diretamente.

15 — Use o Teorema de Stokes para mostrar as igualdades:

- $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0$, onde C é a curva de intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$;
- $\int_C ydx + zdy + xdz = \pi a^2 \sqrt{3}$, onde C é a curva de intersecção da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o plano $x + y + z = 0$.
- $\int_C -y^2 dx + xdy + z^2 dz = \pi$, onde C é a curva de intersecção do plano $y + z = 2$ e do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

16 — Mostre que o fluxo do campo vetorial $\vec{F} = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$, sobre a superfície S dada pela fronteira da região delimitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0, y = 0$ e $y + z = 2$, em relação à normal exterior, é igual a $\frac{184}{35}$.

17 — Seja n a normal unitária exterior à superfície fechadas S que contem o volume V , do tipo descrito no teorema de Gauss. Seja f uma função harmônica, $\nabla^2 f = 0$, com segundas derivadas contínuas. Mostre que

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V \|\nabla f\|^2 dx dy dz.$$

Respostas dos Exercícios

1 Parametrização:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta),$$

com $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Vetor normal:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = R^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

1 Parametrização:

$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

com $0 \leq u, v \leq 2\pi$.

Vetor normal:

$$\mathbf{n} = r(R + r \cos u) (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u).$$

1 Parametrização:

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + 1),$$

com (x, y) no triângulo dado.

Vetor normal:

$$\mathbf{n} = (-2x, 0, 1).$$

1 Parametrização:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \sin \theta \cos \phi, b \sin \theta \sin \phi, c \cos \theta),$$

com $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Vetor normal:

$$\mathbf{n} = \sin \theta (bc \sin \theta \cos \phi, ac \sin \theta \sin \phi, ab \cos \theta).$$

1 Parametrização:

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z),$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a \leq z \leq b$.

Vetor normal:

$$\mathbf{n} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0).$$

2 Área:

$$A = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi R^2.$$

2 Área:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos u) \, du \, dv = 4\pi^2 Rr.$$

2 Área:

$$A = \int_a^b \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dz = 2\pi r(b - a).$$

3 Usando coordenadas cilíndricas: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$.

Fluxo:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_2^3 (z^2 - z^2) \, dz \, d\theta = 0.$$

3 Vetor normal:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2u \cos v, -2u \sin v, u).$$

Fluxo:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^\pi \int_0^{\sin v} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, du \, dv = \frac{\pi}{4}.$$

4 Pelo Teorema da Divergência:

$$\Phi = \iiint_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_R 0 \, dV = 0.$$

5 Pelo Teorema de Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

Parametrização: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$.

Integral de linha:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t, \cos t \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = 0.$$

6 Pelo Teorema de Stokes, a integral é igual à integral de linha sobre a borda de S .

Borda: duas circunferências em $z = 1$ e $z = 3$.

Calculando:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 + 0 = 0.$$

7

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \iiint_V (1 + 2 + 3) \, dV = 6 \cdot \frac{4}{3} \pi (3)^3 = 216\pi.$$

7

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \iiint_V 3 \, dV = 3 \cdot 1 = 3.$$

7

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dV.$$

Em coordenadas esféricas:

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r^4 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \frac{12\pi}{5}.$$

7

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \iiint_V 0 \, dV = 0.$$

8 Observe que:

$$\iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS = \iint_S \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla(\nabla \phi) \, dV$$

e que

$$\nabla(\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi$$

9

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

9 Fluxo:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \frac{q}{1} \, dS = q \cdot 4\pi = 4\pi q.$$

9 Como a esfera não contém a origem, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ em seu interior. Pelo Teorema da Divergência:

$$\Phi = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = 0.$$

10 Dica: Use o Teorema de Gauss.

e o seguinte resultado para integrais triplas:

se f é uma função contínua e $\iiint_U f \, dV = 0$ para todo U então f nula.

11 Pelo Teorema de Stokes, a integral é igual à integral de linha sobre a borda de σ . Como a borda é uma curva fechada e $\mathbf{F}$ é $\mathcal{C}^1$, a integral de linha é zero.

12 O Teorema de Green é o Teorema de Stokes aplicado a uma superfície plana no $\mathbb{R}^2$.

13 Pelo Teorema da Divergência:

$$\iint_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \, dV = 0,$$

pois $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

14 Pelo Teorema da Divergência:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_V (2x + 2y + 2z) \, dV = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) \, dx dy dz = 3.$$

Cálculo direto: somando as integrais sobre as 6 faces, obtém-se o mesmo resultado.

15 Seja $\mathbf{F} = (y + z, z + x, x + y)$. Então $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Pelo Teorema de Stokes, a integral de linha é zero.

15 Dica: Integre no disco.

Observe que $\nabla \times (y, z, x) = (-1, -1, -1)$ e que o vetor normal ao disco é $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$

Logo queremos integrar $\sqrt{3}$ ao longo do disco. Observe que o disco tem raio a . Assim

$$\int_C y dx + z dy + x dz = \int_D \sqrt{3} dx dy = \pi a^2 \sqrt{3}$$

15 Seja $\mathbf{F} = (-y^2, x, z^2)$. Então $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 1 + 2y)$.

Pelo Teorema de Stokes, a integral de linha é igual ao fluxo de $\nabla \times \mathbf{F}$ através do disco $x^2 + y^2 \leq 1$, $y + z = 2$.

Cálculo do fluxo:

$$\iint_D (1 + 2y) \, dA = \pi.$$

16 Pelo Teorema da Divergência:

$$\Phi = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_V (y + 2y + 0) \, dV = \iiint_V 3y \, dV.$$

Calculando a integral tripla sobre a região descrita, obtém-se $\frac{184}{35}$.

17 Pela identidade de Green:

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V [f \nabla^2 f + (\nabla f)^2] dV.$$

Como $\nabla^2 f = 0$, temos:

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V (\nabla f)^2 dV.$$