Lista 4

Anulador, projeção e transposta.

1 — Dado M um subconjunto de V. O aniquilador M^0 de M é definido como

$$M^0 = \{f \in V^* | f(m) = 0, \forall m \in M\}$$

Prove que:

a) Se $M \subset N$ então $N^0 \subset M^0$.

b) Se $\dim(V) < \infty$ então a aplicação natural

$$\tau : \mathrm{span}(M) \to (M^0)^0$$

é um isomorfismo.

c) Dado S subespaço de V. Prove que $(V/S)^* \approx S^0$.

2 — Sejam V um K-espaço vetorial e $S \subset V$. Prove que $S^0 = V^*$ se, e somente se, $S = \Phi$ ou $S = \{0\}$.

3 — Sejam V um K-espaço vetorial e S e T subconjuntos de V. Mostre que: se S e T são subespaços, então $S = T$ se, e somente se, $S^0 = T^0$.

4 — Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $(1, 2, 1, 0, 0), (1, 0, 3, 3, 1), (1, 4, 6, 4, 1)$. Determine uma base para W^0.

5 — Sejam V um K-espaço vetorial e S e T subespaços de V. Mostre que:
$(S + T)^0 = S^0 \cap T^0$ e $(S \cap T)^0 = S^0 + T^0$. (Dica para provar que $(S \cap T)^0 \subset S^0 + T^0$: Usando completamento de base, ache $C = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$, base de V, onde todos os B^is são disjuntos 2 a 2 e tais que B_1 gere $S \cap T$, $B_1 \cup B_2$ gere S e $B_1 \cup B_3$ gere T. Fixe $f \in (S \cap T)^0$ e construa $g \in S^0$ e $h \in T^0$ tais que $f = g + h$.)

6 — Seja $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ dada por $f(x, y, z) = 5x - iz$ e seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (2x + y, y - x, iy)$. Determine $T^t(f)$.

7 — Seja $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ definido por $\varphi(x,y) = 3x - 2y$. Considere $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dada por $T(x,y,z) = (x+y, y+z)$. Determine $T^t(\varphi)$.

8 — Considere $V = \mathbb{R}[X]$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f \in V^*$ dado por $f(p) = \int_a^b p(t)dt$. Se $D \in L(V,V)$ denota o operador derivação, determine $D^t(f)$.

9 — Sejam $\mathbb{R}_n[X]$ e $D \in L(V,V)$ denota o operador derivação. Determine KerD^t.

10 — Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e seja $\varphi : L(V,V) \to L(V^*, V^*)$ definida por $\varphi(T) = T^t$. Mostre que φ é isomorfismo.

11 — Dado um espaço vetorial $V = L_1 \oplus L_2$. Prove que os seguintes operadores são lineares:

a) Dado $v \in V$ e seja a decomposição de v, $v = v_1 + v_2$, seja $\sigma : V \to V$ tal que $\sigma(v_1 + v_2) = v_1$. Esse operador é chamado projeção no espaço L_1.

b) Dado $v \in V$ e seja a decomposição de v, $v = v_1 + v_2$, seja $\tau : V \to V$ tal que $\tau(v_1 + v_2) = v_1 - v_2$. Esse operador é chamado reflexão no espaço L_1 paralelo a L_2.

12 — Ache a imagem e o núcleo do operador de projeção.