Geometria diferencial I
Quinta lista de exercícios

1. Mostre que o parabolóide $z = x^2 + y^2$ é difeomorfo a um plano.

2. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $d : S \to \mathbb{R}$ dada por $d(p) = \|p - p_0\|$, em que $p \in S$ e $p_0 \notin S$; isto é, d é a distância de p a um ponto fixo p_0 que não está em S. Prove que d é diferenciável.

3. Seja $S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ a esfera unitária e $A : S^2 \to S^2$ a aplicação antípoda $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Mostre que A é um difeomorfismo.

4. Considere a superfície $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$, em que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Obtenha a aplicação normal $N(u, v)$.

5. Considere o cilindro circular descrito por $x(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $a > 0$. Descreva a imagem da aplicação normal sobre a esfera unitária.

6. Considere a superfície $x(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, e uma reparametrização dada por $y(\eta, \xi) = \left(\eta, \xi, \eta^2 - \xi^2\right)$, $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2$. Verifique que, se h é a mudança de parâmetros tal que $y = x \circ h$ e $r = (\eta, \xi)$, então os coeficientes da primeira forma quadrática de y em r diferem dos coeficientes da primeira forma quadrática de x em $h(r)$. Mas observe que as primeiras formas quadráticas coincidem.

7. Mostre que a faixa de Moebius não é orientável.

8. Seja uma $S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}$ uma esfera de raio r. Mostre que a curva que minimiza a distância entre dois pontos sobre a esfera é um pedaço da circunferência de raio r.

9. Calcule a área do elipsóide $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$, $a, b, c > 0$.

10. Considere a superfície $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$.

    (a) verifique que as curvas coordenadas são ortogonais se e somente se $\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} = 0$;

    (b) se D é uma região de $\mathbb{R}^2$, prove que a área $x(D)$é dada por $A(x(D)) = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} dudv$ e que $A(x(D)) \geq A(D)$. Quando ocorre $A(x(D)) = A(D)$?

11. Sejam $x, y : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, superfícies simples e $D \subset U$ uma região do plano. Prove que se x e y são isométricas então as áreas $A(x(D)) = A(y(D))$.

12. Considere um elipsóide triaxial dado pela equação de raios $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1\right\}$ $a < b < c$. Suponha as três elipses principais, ou seja, no plano xy, no plano yz e no plano xz sobre o elipsóide. Construa um triângulo com pontos sucessivos de intersecção e calcule seus ângulos internos.