Lista de Exercícios Geral

Cálculo Vetorial - Para entregar no fim do ECE

Parametrizações

1 — Encontre uma parametrização apropriada para a curva suave por partes em $\mathbb{R}^3$.

a) intersecção do plano $z = 3$ com o cilindro elíptico

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

b) O triângulo formado viajando do ponto (1, 2, 3) para (0, -2, 1), para (6, 4, 2) e de volta para (1, 2, 3).

Parte Técnica: para treinar cálculos de integral de linha

2 — Calcule as seguintes integrais de linha ao longo dos respectivos caminhos indicados:

a) $F(x, y) = (y^2 - z^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, ao longo da trajetória $\gamma(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$;

b) $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (xz - y)\mathbf{k}$, ao longo da trajetória $\gamma(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$.

3 — Calcule $\int_\gamma dx + y\,dy + dz$, onde γ é a intersecção do plano $y = x$ com a superfície $z = x^2 + y^2$, $z \leqslant 2$, sendo o sentido de percurso do ponto $(-1, -1, 2)$ para o ponto $(1, 1, 2)$.

4 — Determine se os seguintes campos são conservativos. No caso afirmativo, determine uma função potencial.

a) $F(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

b) $F(x, y, z) = ye^{-x}\mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$.

Teorema de Green

5 — Use o teorema de Green para calcular a área da região limitada pelo eixo x e pelo arco da ciclóide:

$$x = t - \text{sen}(t), \quad y = 1 - \cos(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

6 — Use o Teorema de Green para avaliar as integrais de linha ao longo das curvas dadas orientadas positivamente.

a) $\oint_\gamma x^2y^2dx + 4xy^3dy$; γ é o triângulo com vértices (0,0), (1,3) e (0,3).

b) $\oint_\gamma (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos(y^2))dy$; γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

7 — Formula do Cadarço Dado $P \subseteq \mathbb{R}^2$ um polígono não necessariamente convexo,cujos vértices ordenados no sentido horário são, $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$. Então

$$\text{area}\,(P) = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_Ny_1 - x_1y_N)}{2}.$$

(Ps: Procure a explicação do nome dessa fórmula)

Parte Conceitual

8 — Considere a forma diferencial $u(x,y)P(x,y)dx + u(x,y)Q(x,y)dy$, onde P, Q e u são supostas de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Prove que uma condição necessária para que a forma diferencial seja exata em Ω é que

$$\frac{\partial u}{\partial y}P - \frac{\partial u}{\partial x}Q = u\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) \text{ em } \Omega.$$

9 — Determine $u(x,y)$ que só depende de x tal que $(x^3 + x + y)u(x,y)dx - xu(x,y)dy$ seja exata.

10 — Seja $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^\alpha}\mathbf{i} + \dfrac{y}{(x^2+y^2)^\alpha}\mathbf{j}$. Determine α para que $\mathbf{F}$ seja solenoidal.

Aplicações dos conceitos de integral de linha

11 — Experimentos mostram que uma corrente estacionária I em um fio comprido produz um campo magnético $\mathbf{B}$ que é tangente a qualquer circunferência contida num plano perpendicular ao fio e cujo centro pertence ao eixo do fio. A Lei de Ampère relaciona a corrente elétrica aos seus efeitos magnéticos e afirma que

$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\ell = \mu_0 I,$$

onde I é a corrente total que passa através de qualquer superfície limitada por uma curva fechada C e μ_0 é uma constante chamada de permeabilidade de espaço livre. Tomando C como uma circunferência com raio r, mostre que a magnitude $B = \|\mathbf{B}\|$ do campo magnético a uma distância r do centro do fio é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

12 —

a) Suponha que $\mathbf{F}$ represente o campo força inverso quadrado, isto é,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

para alguma constante c, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Encontre o trabalho feito pela força $\mathbf{F}$ para mover um objeto de um ponto P_1 ao longo de um caminho até um ponto P_2, em termo das distâncias d_1 e d_2 destes pontos à origem.

b) Um exemplo de um campo força inverso quadrado é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$. Encontre o trabalho feito pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1,52.10^8$ Km do Sol) para o periélio (em uma distância mínima de $1,47.10^8$ Km do Sol). Use os valores $m = 5,97.10^{24}$ Kg, $M = 1,99.10^{30}$ Kg e $G = 6,67.10^{-11}$ N.m^2/Kg^2.

Gradiente, Divergente e Rotacional

13 — Uma espaçonave está em apuros perto do lado ensolarado de Mercúrio. A temperatura do casco do navio quando ele está na localização (x,y,z) será dada por

$$T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2},$$

onde x, y e z são medido em metros. Ele está atualmente em $(1,1,1)$.

a) Em que direção deve mover a fim de diminuir a temperatura mais rapidamente?

b) Se a espaçonave viaja a e^8 metros por segundo, quão rápido será a diminuição da temperatura se ele prosseguir Essa direção?

c) Infelizmente, o metal do o casco se quebrará se arrefecido a uma taxa maior que $\sqrt{14}e^2$ graus por segundo. Descreva o conjunto de possíveis direções em que ele pode ir para diminuir a temperatura abaixo de essa taxa.

14 — Dado $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geqslant 1, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ a norma usual em $\mathbb{R}^n$, com $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}$. Prove que

$$D_{\mathbf{x}}(f)(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{x} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{x}\|},$$

para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, mas que $\mathbf{f}$ não é diferenciável no $\mathbf{0}$.

15 — Calcule $\nabla \cdot F$ e $\nabla \times F$ para os seguintes campos vetoriais:

a) $F(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$

b) $F(x, y, z) = (1, x + yz, xy - \sqrt{z})$

16 — Mostre que qualquer campo vetorial da forma $F(x, y, z) = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$, onde f, g, h são funções diferenciáveis, é irrotacional.

17 — Mostre que qualquer campo vetorial da forma $F(x, y, z) = f(y, z)\mathbf{i} + g(x, z)\mathbf{j} + h(x, y)\mathbf{k}$, onde f, g, h são funções diferenciáveis, é incompressível.

18 — Calcule o Laplaciano das seguintes funções:

a) $f(x, y) = \arctan(y/x)$, com $y > 0$

b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

19 — Mostre que $\nabla \times (f\mathbf{u}) = f\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u}$

20 — Mostre que $\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u\mathring{u} \cdot (\nabla \times v)$

21 — Se f, g forem campos escalares e F, G forem campos vetoriais, defina as operações $fF, F \cdot G$ e $F \times G$ por:

$$(fF)(x, y, z) = f(x, y, z)F(x, y, z)$$
$$(F \cdot G)(x, y, z) = F(x, y, z) \cdot G(x, y, z)$$
$$(F \times G)(x, y, z) = F(x, y, z) \times G(x, y, z).$$

Suponha que existam as derivadas parciais das funções envolvidas e são contínuas. Mostre que:

a) $\text{rot}(fF) = f \,\text{rot}\, F + (\nabla f) \times F$

b) $\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

c) $\nabla \times (u \times v) = u(\nabla \cdot v) - v(\nabla \cdot u) + (v \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)v$, onde $u, v \in \mathbb{R}^3$

d) se $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ então $\text{rot}(\text{rot}F) = \text{grad}(\text{div}F) - \nabla^2 F$, onde $\nabla^2 F = (\triangle P, \triangle Q, \triangle R)$.

22 — Um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo. Mostre que se u é irrotacional, sendo $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, então $u \times r$ é solenoidal.

23 — Mostre que se u e v são irrotacionais então $u \times v$ é solenoidal.

24 — A velocidade de um fluido bidimensional é dada por $v = v(x, y) = u(x, y)\overrightarrow{i} - v(x, y)\overrightarrow{j}$. Supondo que o fluido seja incompressível e irrotacional, prove que valem as condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

25 — Mostre que se ϕ é um campo escalar diferenciável então $\nabla \times (\phi \nabla \phi) = 0$.

Integrais de Superfícies e os Teoremas de Gauss e de Stokes

26 — Descreva as parametrizações e calcule o vetor normal associado a essas parametrizações para as seguintes superfícies

a) Esfera

b) Toro

c) Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + 1$ sobre o triângulo de vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 4)$

d) Elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

e) Cilindro circular $x^2 + y^2 = r^2$ com $a \leqslant z \leqslant b$.

27 — Calcule a área das seguintes superfícies usando integral de superfície

a) Esfera .

b) Toro

c) Cilindro circular $x^2 + y^2 = r^2$ com $a \leqslant z \leqslant b$.

28 — Calcule o fluxo do campo vetorial

a) $F(x, y, z) = (xz, yz, -z^2)$ para fora da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = 1 + x^2 + y^2,$$

$$2 \leqslant z \leqslant 3\}.$$

b) $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$ e S é a parte do cone

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$$

com $0 \leqslant u \leqslant \operatorname{sen} v$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$ com o vetor normal apontado para cima.

29 — Calcule o fluxo do campo de vetores

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x, y, z)$$

através do sólido R limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

30 — Utilize o Teorema da Divergência para calcular as integrais de superfície $\iint\limits_S \mathbf{f} \cdot dS$ do campo de vetor $\mathbf{f}(x, y, z)$ ao longo da superfície S.

a) $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$

b) $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, S : Bordo de um cubo sólido $S = \{(x, y, z) : 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}$

c) $\mathbf{f}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

d) $\mathbf{f}(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

31 — Um campo escalar ϕ satisfaz $\|\nabla\phi\|^2 = 4\phi$ e $\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) = 10\phi$. Calcule $\displaystyle\iint_S \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$, onde S é a esfera unitária e n é a normal à esfera.

32 — Seja

$$\overrightarrow{E}(x, y, z) = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

onde q é uma constante não-nula.

a) Calcule $\nabla \cdot \overrightarrow{E}$;

b) Calcule o fluxo de $\overrightarrow{E}$ através da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com normal $\overrightarrow{n}$ apontando para fora da esfera;

c) Calcule o fluxo de $\overrightarrow{E}$ através da superfície esférica $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$, com normal $\overrightarrow{n}$ apontando para fora da esfera.

33 — Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$ e seja $\overrightarrow{u}$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω. Suponha que

$$\iint_\sigma \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} dS = 0,$$

para toda superfície esférica σ, com normal exterior $\overrightarrow{n}$, contida em Ω. Prove que $\overrightarrow{u}$ é solenoidal em Ω.

34 — Seja $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$ de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Seja σ a fronteira do conjunto

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - 1 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2\},$$

com normal $\overrightarrow{n}$ apontando para fora de K. Mostre que $\displaystyle\iint_\sigma \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = 0$.

35 — Mostre que o Teorema de Green é um caso especial do Teorema de Stokes.

36 — Seja $\overrightarrow{F}$ um campo de classe $\mathcal{C}^1$ num aberto contendo a fronteira do cubo $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. Seja $\overrightarrow{n}$ a normal apontando para fora do cubo. Mostre que $\displaystyle\iint_\sigma \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} dS = 0$.

37 — Seja S a superfície do cubo unitário $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, e seja $\mathbf{n}$ o vetor unitário normal exterior a S. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, use o teorema do divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$. Verifique o resultado calculando a integral de superfície diretamente.

38 — Use o Teorema de Stokes para mostrar as igualdades:

a) $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0$, onde C é a curva de intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$;

b) $\int_C y dx + z dy + x dz = \pi a^2 \sqrt{3}$, onde C é a curva de intersecção da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o plano $x + y + z = 0$.

39 — Seja $\mathbf{n}$ a normal unitária exterior à superfície fechadas S que contem o volume V, do tipo descrito no teorema de Gauss. Seja f uma função harmônica, $\nabla^2 f = 0$, com segundas derivadas contínuas. Mostre que

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V \|\nabla f\|^2 \, dx dy dz .$$

Green, Gauss Stokes: Aplicações

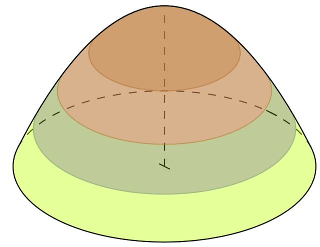
40 — Calcule a área da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, situada no interior do cilindro $x^2 + y^2 = ay$, com $a > O$

41 — Calcular a área da porção do paraboloide $x^2 + z^2 = 2ay$ cortada pela plano $y = a$.

42 — Considere S uma superfície orientada de bordo C e sejam $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}$ um vetor constante. Considere o campo $\mathbf{F} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$. Mostre que

$$\int_C \mathbf{F} d\ell = 2 \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

43 — Considere a superfície S descrita pelo parabolóide $z = 16 - x^2 - y^2$ para $z \geqslant 0$, como mostrado na figura abaixo.



Considere a seguinte orientação: deixe $\mathbf{n}$ denotar o vetor normal unitário para S com componente z positiva. A intersecção da superfície S com o plano z será uma curva C.

Verifique o Teorema de Stokes para a superfície S descrita acima e o campo vetorial $\mathbf{F} = (3y, 4z, -6x)$.

44 — A origem do sistema de coordenadas cartesianas está no centro da Terra. Suponha que a Lua esteja sobre o eixo z a uma distância R da Terra (centro-a-centro). A força de maré exercida pela Lua sobre uma partícula na superfície da Terra (ponto (x, y, z)) é dada por

$$\vec{F} = GMm\left(-\frac{x}{R^3}, -\frac{y}{R^3}, \frac{2z}{R^3}\right)$$

Encontre o potencial escalar para esta força de maré.

45 — Use as equações de Maxwell no vácuo e na ausência de fontes, para mostrar que os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfazem a equação de onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t}\right)\mathbf{E} = 0\,, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t}\right)\mathbf{B} = 0\,,$$

isto é, mostre que campos eletromagnéticos se propagam com velocidade c no vácuo.