Universidade Federal do ABC
Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Prof. Eduardo Guéron

Lista Complementar de Exercícios à Lista 02
EDO's de 1ª ordem: "diretas", autônomas, separáveis, homogêneas e suas aplicações

1. Determine as soluções das EDO's abaixo:

a. $\dot{x} = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}$ c. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\ln t}{t}$ e. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sec x}$

b. $\dfrac{dx}{dt} = \ln t$ d. $y' = x\ln(1+x^2)$ f. $\dot{x} = \dfrac{1}{t^2 - 3t + 2}$

2. Determine os pontos fixos das seguintes EDO's autï¿½omas e analise suas estabilidades. Em todos os itens, o "ponto" denota derivação em relação a um parâmetro t que pode ser interpretado como o tempo físico. No item a, c é simplesmente uma constante real.

a. $\dot{x} = c - x$ c. $\dot{x} = 1 - \operatorname{sen} x$ e. $\dot{x} = x^2$

b. $\dot{x} = 1 - 2\operatorname{sen} x$ d. $\dot{x} = -1 + x^2$ f. $\dot{x} = 1 + x^2$

Comentário: Se você tiver analisado corretamente os 3 últimos itens, deve ter observado que há diferenças significativas entre os comportamentos qualitativos desses sistemas dinâmicos, apesar deles serem descritos por EDO's muito semelhantes. Aquelas 3 equações podem ser vistas como casos particulares de $\dot{x} = c + x^2$. Dizemos que há uma *bifurcação* quando a estrutura qualitativa das soluções de um sistema dinâmico muda ao variarmos um parâmetro. Especificamente, dizemos que $c = 0$ é um *ponto de bifurcação*, pois o número de pontos fixos da equação $\dot{x} = c + x^2$ depende se $c < 0$ ou $c > 0$.

3. *Lei do resfriamento de Newton* - Acredita-se que, sob certas condições, a temperatura de um objeto inicialmente à temperatura T_0, quando colocado em um ambiente à temperatura constante T_{amb}, deva variar ao longo do tempo de acordo com a EDO

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_{amb}).$$

a. Será que a constante α pode assumir qualquer valor? Por que existe um sinal negativo antes dessa constante?

b. Resolva esse problema de valor inicial (PVI).

4. Um reservatório contém 15 Kg de sal dissolvidos em 100 L de água e, além de ser abastecido com uma solução de concentração 20 g/L a uma taxa de 10 L por minuto, a mistura total é drenada à mesma taxa. Qual será a massa de sal presente no reservatório após meia hora?

5. Inicialmente, um tanque contém 1000 L de água pura. Ele é abastecido com duas soluções salinas, a primeira com concentração 50 g/L à taxa de 5 L/min, enquanto a

outra é lançada no tanque à taxa de 10 L/min e resultaria na adição de 0,04 Kg de sal à mistura total a cada minuto, se não houvesse uma rachadura no fundo tanque que resulta em um vazamento de 15 L/min da mistura. Determine a quantidade de sal em função do tempo, mas tente imaginar qual será o estado da mistura após "muito tempo" antes de fazer qualquer cálculo.

6. O Banco Central de uma pequena nação deseja trocar todas as cédulas em circulação no país, cuja moeda é o chinfrin. Imagine que há 10 bilhões de chinfrins circulando naquela economia, e que 50 milhões de chinfrins passam pelos bancos daquela nação a cada dia. Todas as cédulas antigas que passam pelos bancos são imediatamente substituídas. Obtenha a EDO que descreve a variação da quantidade de dinheiro "novo" já em circulação em função do tempo e estime quanto tempo é necessário para que 80% do dinheiro antigo seja recolhido.

Dica: Esse problema é análogo ao de misturas. Pense nos "chinfrins novos" como uma grandeza análoga à quantidade de sal presente em uma mistura.

7. Resolva a equação $e^{-y}y' + \cos x = 0$. A constante de integração pode assumir qualquer valor?

8. Resolva as equações abaixo:

a. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

b. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

c. $\dot{x} = 1 + t - x^2 - tx^2$

d. $y' = \dfrac{2x}{y + x^2 y}$

e. $\dot{z} = \dfrac{tz}{2\ln z}$

f. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{1+y^2}$

g. $\dfrac{dz}{dt} = z^2 - 7z + 6$

h. $\dot{y} = \dfrac{y^2 - 3y + 2}{y+3}$

9. Um tanque de capacidade infinita, mas inicialmente com 50 Kg de sal dissolvidos em 100 L de água, é abastecido com água pura a uma taxa de 2 L/min. A mistura é drenada à taxa de 1 L/min. Obtenha a EDO que modela esse sistema. Note que ela não é autônoma, mas é separável. Determine a quantidade de sal no tanque em um instante arbitrário.

10. As Leis de Newton asseguram que o movimento de uma partícula pontual de massa m submetido à aceleração gravitacional g, quando se encontra à altura x acima da superfície de um planeta de raio R, pode ser descrito pela equação diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}.$$

Pela regra da cadeia, $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$. Use esse fato para obter a solução da EDO dada.

11. Resolva as seguintes EDO's homogêneas:

a. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - 4x}{x - y}$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 3y^2}{2xy}$

c. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$