Universidade Federal do ABC - UFABC
1ª Avaliação de Funções de Várias Variáveis - Prova A
Prof. Eduardo Guéron

1. Suponha que uma rampa de skate é modelada pela função $z(x, y) = 4x^2 + 9y^2$, onde a coordenada z representa sua altura em decímetros com um valor máximo de 36dm. (*4 pts)*

   (a) Escreva a equação e esboce o gráfico da curva de nível correspondente ao limite da rampa, ou seja, à sua parte mais alta. Escreva as equações e esboce outras duas curvas de nível à sua escolha.

   (b) Esboce o gráfico das curvas obtidas da intersecção da superfície com os planos: $y = 0$, $y = x$ e $x = 0$. Esboce essas três curvas **no mesmo gráfico**.

   (c) Considere que uma skatista esteja descendo, no meio da performance, do ponto $P = (2, 1, 25)$. Qual direção ela deve seguir para que queda seja a mais íngreme possível? (escreva o vetor que dá essa direção). Compare com a maior inclinação possível partindo do topo da rampa no ponto $(3, 0, 36)$.

   (d) Em qual ponto do alto da rampa a queda é mais acentuada? *(dica: considere nessa região a relação entre x e y e escreva a norma do vetor você sabe qual em função de uma das variáveis, posteriormente encontre os máximos).*

2. Seja $f(x, y) = \sqrt{x}\,(2\cos(y) + \sin(y))$ (*2.5 pts)*

   (a) Escreva a diferencial df no ponto $(4, 0, f(4, 0))$.

   (b) Escreva a Equação do Plano Tangente à superfície dada no Ponto definido no item anterior.

   (c) Use a aproximação linear para estimar o valor de $f(3.9, 0.1)$.

3. As funções abaixo não são definidas no ponto $(x, y) = (0, 0)$. Defina, quando for possível, $f(0, 0)$ para que $f(x, y)$ seja contínua neste ponto. Justifique sua resposta (mencionando a impossibilidade quando for o caso). (*2.5 pts)*

   (a) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)\cos(\frac{1}{yx^3})$

   (b) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

4. As funções $f(x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ que obedecem a equação de Laplace

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, são ditas harmônicas.

   Mostre que se u e v são funções de classe C^2 (segundas derivadas contínuas) em um Domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ que obedecem às equações de Cauchy-Riemann

   $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$; então $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são harmônicas. (*2.5 pts)*