Universidade Federal do ABC - UFABC
1ª Avaliação de Funções de Várias Variáveis - Prova B
Prof. Eduardo Guéron

1. Suponha que a temperatura (em graus Celsius) de uma placa de um material exótico seja modelada pela função $T(x,y) = 60 - 9x^2 - 4y^2$. ($x$ e y são dados em metros) (*4 pts)*

   (a) Suponha que uma formiga, professora de matemática, de nome Miranda seja deixada no ponto $P = (1,1)$. Escreva a expressão da curva de nível em que se encontra o inseto e esboce seu gráfico. Esboce, ainda, a curva de nível correspondente à temperatura de 24 graus.

   (b) Esboce o gráfico das curvas que expressam a variação da Temperatura considerando os caminhos retos dados por $y = 0$, $y = x$ e $x = 0$. Trace-as **no mesmo gráfico**

   (c) Já bastante incomodada com a temperatura (tudo bem que a formiga seja peciloterma mas isso não é biologia), a formiga decide sair logo daquela situação. Ajude-a indicando que direção deve seguir para que a temperatura caia o mais rapidamente possível. Qual será a taxa de variação da Temperatura nesse ponto se a formiga seguir na direção indicada com velocidade de $0,1 m/s$?

   (d) Suponha, agora, que uma multidão de formigas esteja distribuída ao longo da Isoterma correspondente à $T = 24$ graus e todas resolvam caminhar na direção de maior aumento de temperatura. De que ponto(s) sairá a formiga que sentirá maior variação de temperatura no seu primeiro micro deslocamento? *(dica: considere a relação entre x e y e escreva a norma do vetor você sabe qual em função de uma das variáveis, posteriormente encontre os máximos).*

2. Seja $f(x,y) = 4\sqrt{2x}\,(\cos(y) - \sin(y))$ (*2.5pts)*

   (a) Escreva a diferencial df no ponto $(2, 0, f(2,0))$.

   (b) Escreva a Equação do Plano Tangente à superfície dada no Ponto definido no item anterior.

   (c) Use a aproximação linear para estimar o valor de $f(1.9, -0.1)$.

3. As funções abaixo não são definidas no ponto $(x,y) = (0,0)$. Defina, quando for possível, $f(0,0)$ para que $f(x,y)$ seja contínua neste ponto. Justifique sua resposta (mencionando a impossibilidade quando for o caso). (*2.5pts)*

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

   (b) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)\sin(\frac{2}{y^2 - x^3})$

4. As funções $f(x,y)$ em $\mathbb{R}^2$ que obedecem a equação de Laplace

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, são ditas harmônicas.

   Mostre que se u e v são funções de classe C^2 (segundas derivadas contínuas) em um Domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ que obedecem às equações de Cauchy-Riemann

   $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$; então $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são harmônicas. (*2.5 pts)*