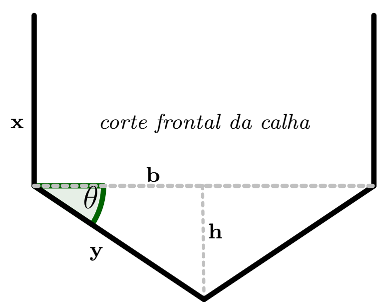
Universidade Federal do ABC - UFABC
2^a Avaliação de Funções de Várias Variáveis - Prova A

1. Seja a função definida por
$$f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 6xy$$
   (a) Ache e classifique todos os seus pontos críticos.
   (b) Encontre os máximos e mínimos globais considerando, agora, que a função está restrita ao interior do triângulo cujos vértices são $(0,0)$, $(2,1)$, $(2,0)$.

2. Uma calha (esdrúxula) é construída a partir de uma folha retangular de largura L que é dobrada de tal forma as laterais fiquem paralelas e a base seja formada pelos lados iguais de um triângulo isóceles. Ache o ângulo (θ) em relação à base do triângulo que maximiza a capacidade da calha.

   (*Dica: Calcule a área do triângulo superior em função de sua altura h e sua base $2b$ e utilize o teorema de Pitágoras como vínculo adicional. Da relação entre y e h se obtém θ.*)



3. Seja R a região definida entre um parabolóide elíptico da forma $z = 16 - (4x^2 + y^2)$ e o plano $z = 0$. Ache o volume desta região da seguinte forma:
   - Defina um novo sistema de coordenadas: $x = \rho\cos\theta$, $y = 2\rho\sin\theta$, $z = z$.
   - Calcule o elemento de volume dV usando o determinante Jacobiano $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}$.
   - Escreva os limites da região de integração R nas novas coordenadas e resolva a integral.

4. As posições X_{CM} e Y_{CM} do Centro de Massa de uma placa com densidade $\sigma(x,y)$ que ocupa a região R são dadas respectivamente pelas integrais:
$$X_{CM} = \frac{1}{M}\iint\limits_R x\sigma(x,y)dA, \quad Y_{CM} = \frac{1}{M}\iint\limits_R y\sigma(x,y)dA,$$
   em que M é a massa total da placa dada por
$$M = \iint\limits_R \sigma(x,y)dA$$
   .

   Calcule as posições X_{CM} e Y_{CM} de uma placa triangular de densidade constante, cujos vértices estão localizados no plano xy nas posições $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$.